数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

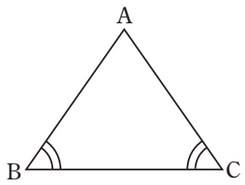
～ユークリッド幾何の世界～

第10回 「二角が等しければ二等辺三角形」をどう証明しよう？

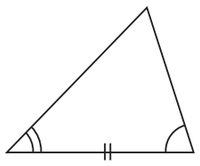
第５回（5月19日付）の記事で、「二等辺三角形の底角は等しい」ことを証明しました。今回は、その逆の性質である「二角が等しい三角形は二等辺三角形である」ことの証明を考えてみましょう。

三角形がぴったり重なるための新しい根本原理

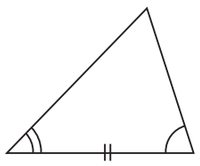
すでに、たくさんの根本原理を確認しているので、「二角が等しい三角形は二等辺三角形である」ことを、いろいろな方針で証明できるのですが、ここでは、三角形がぴったり重なるための新しい根本原理を導入して、その根本原理を使って証明することを考えていきます。



ここで新しく導入する根本原理は、「一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」という原理です。



まずは、この原理の証明を考えてみましょう。

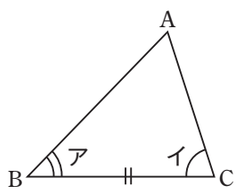


問題１

「一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことを、「三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる」という根本原理を使って証明してください。

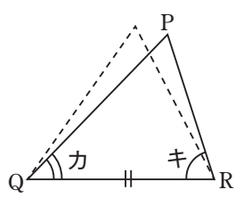
考え方

２つの三角形を△ABCと△PQRとし、BC=QR、角ア＝角カ、角イ＝角キ、（右の図）とします。



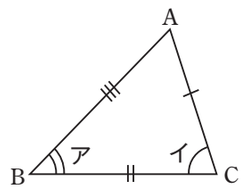
このとき、「三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことを使って、△ABCと△PQRがぴったり重なることを証明したいわけです。

そこで、△ABCと三辺が互いに等しい三角形を、２頂点が△PQRの２頂点Q、Rと重なり、残りの頂点がQRに対して頂点Pと同じ側にあるように描いてみると……。

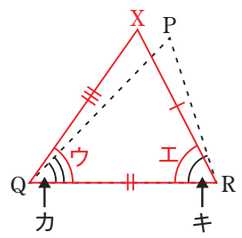


証明

２つの三角形を△ABCと△PQRとし、△ABCのBAとBCの間の角をア、CAとCBの間の角をイ、△PQRのQPとQRの間の角をカ、RPとRQの間の角をキ、BC=QR、角ア＝角カ、角イ＝角キとします。

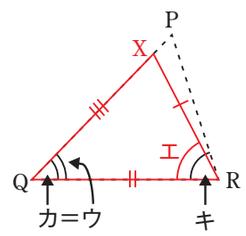


さらに、点Qを中心とし半径ABの円と点Rを中心とし半径ACの円の２つの交点のうち、直線QRに対して、Pと同じ側にある点をXとします。



すると、図の描き方から、△ABCと△XQRは、三辺が互いに等しいので、ぴったり重なります。

つまり、三角形の３つの角が互いに等しくなりますから、△XQRの二辺QXとQRの間の角をウとすると、△ABCの角アと△XQRの角ウは等しくなります。



ここで、△ABCの角アと△PQRの角カも等しかったので、結局、角ウ＝角カになります。

すると、△XQRと△PQRにおいて、角ウ＝角カなので、辺QXと辺QPが重なるとわかります。

△XQRの二辺RXとRQの間の角をエとし、同様に考えると、角エ＝角イ、角イ＝角キより、角エ＝角キがわかるので、辺RXと辺RPも重なるとわかります。

したがって、点Xと点Pの位置は一致するとわかり、△XQRと△PQRは３つの頂点の位置が一致したので、ぴったり重なるとわかりました。

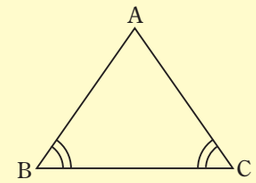
△ABCと△XQRもぴったり重なるので、結局、△ABCと△PQRはぴったり重なることが証明できました。

二角が等しければ二等辺三角形になることの証明は？

それでは、二角が等しい三角形は二等辺三角形になることの証明に取り組みましょう。チャレンジ問題にするので、頑張って考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

「△ABCにおいて、BAとBCの間の角とCAとCBの間の角が等しければ、AB=ACである」ことを、根本原理から証明してください。



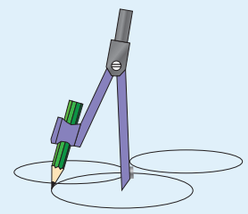
考え方

いろいろな考え方がありますが、まずは、頂点Aを通る補助線を引き、２つの三角形がぴったり重なることの利用を考えてみましょう。もちろん、この記事で説明したばかりの「一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」も使って良いです。その証明ができた人は、ぜひ、他の方針も考えてみてくださいね。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

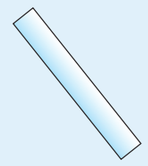
コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

〈根本原理〉



- 定規で、２点を通る直線が引ける。
- コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる（３つの角も互いに等しい）。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる（残りの辺と角も互いに等しい）。
- 二等辺三角形の底角は等しい。
- ３点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、３点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい。
- ２直線において、錯角の位置の角が等しければ、その２直線は平行である。
- ２直線が平行であれば、その２直線に対する錯角の位置の角が等しい。
- 三角形の内角の和は180度である。

〈図を描くときの注意〉



- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。