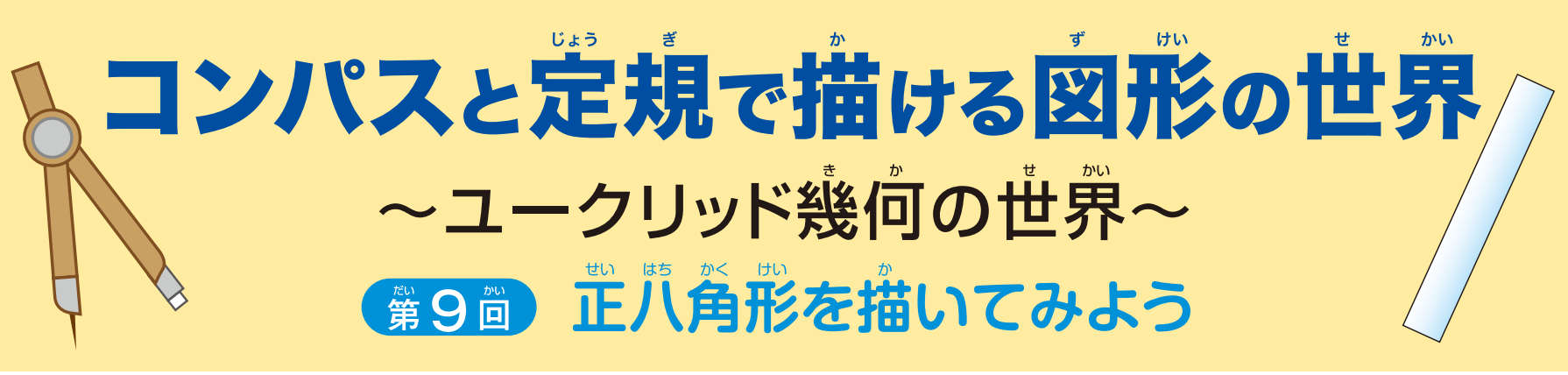




数学の世界をのぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎



コンパスと定規で描ける図形の世界

～ユークリッド幾何の世界～

第9回 正八角形を描いてみよう

まずは、正方形を描いてみよう

正方形は、四辺の長さがすべて等しく、4つの内角がすべて直角の四角形のことです。

問題1

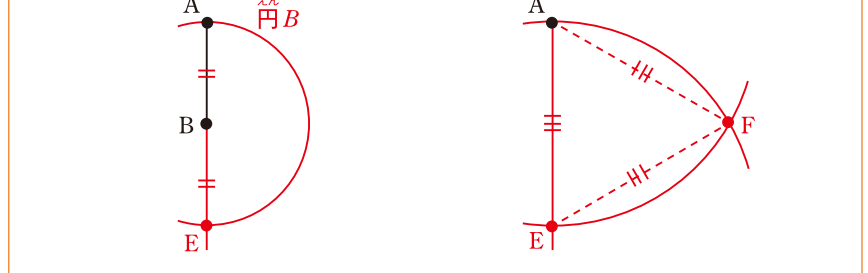
線分ABが与えられているとき、線分ABが一边となるような正方形ABCDを1つ描いてみましょう。

考え方

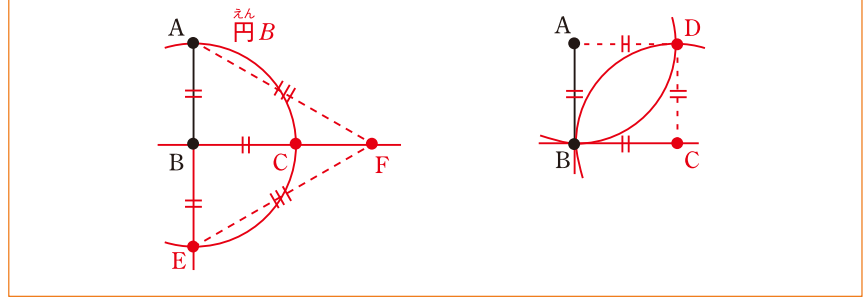
前回の第8回(8月18日付)の連載を読んだ人は、そこで長方形を描いたことを思い出すと簡単に描けると思います。読んでいない人は、まずは、垂直な線をどう描くのかを考えてみましょう。

描き方

与えられた線分ABをBの方へ線分ABよりも長く延長しておきます。点Bを中心とし半径ABの円Bを描き、ABのBの方への延長線との交点をEとします。次に、点Aを中心とし半径AEの円と点Eを中心とし半径AEの円を描き、それら2円の交点のうちの一つをFとします。

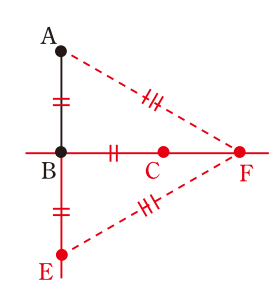


そして、2点B、Fを通る直線を描き、円Bとの交点をCとします。最後に、点Aを中心とし半径ABの円と点Cを中心とし半径BCの円を描き、それら2円の交点のうちBでない方をDとすると、四角形ABCDは、一边がABの正方形になります。

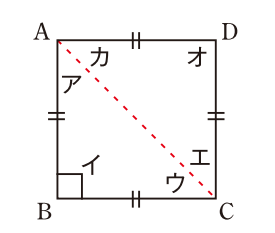


証明

図の描き方から、 $AB=EB$ 、 $AF=EF$ 、 $BF=BF$ です。すると、「三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ので、 $\triangle ABF$ と $\triangle EBF$ はぴったり重なります。



したがって、BAとBFのなす角とBEとBFのなす角はぴったり重なるので等しいとわかり、その角は直角です。つまり四角形ABCDのBAとBCのなす角は直角とわかりました。次に、右の図のように、角ア、イ、ウ、エ、オ、カをおきます。



図の描き方から、 $AB=CD$ 、 $BC=DA$ 、 $AC=CA$ です。すると、「三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ので、 $\triangle ABC$ と $\triangle CDA$ はぴったり重なります。

したがって、対応する角もぴったり重なるので、角オ=角イ=90度(直角)、角ア=角エ、角ウ=角カとなり、角ア+角カ=角エ+角ウになります。ここで、三角形の内角の和は180度なので、四角形ABCDの内角の和、角ア+角イ+角ウ+角エ+角オ+角カは、 $\triangle ABC$ と $\triangle CDA$ の内角の和、角ア+角イ+角ウ=180度と角エ+角オ+角カ=180度の和になり、角ア+角イ+角ウ+角エ+角オ+角カ=360度になります。角オ=角イ=90度を考えると、角ア+角ウ+角エ+角カ=360度-角イ-角オ=360度-90度-90度=180度なので、角ア+角カ=角エ+角ウ=90度になります。以上から、四角形ABCDは、四辺の長さがすべて等しく、4つの内角がすべて90度(直角)とわかったので、四角形ABCDは正方形です。

正八角形を描いてみよう

さて、正方形が描けたので、次に、線分ABが与えられているとき、線分ABが一边となるような正八角形ABCDEFGHを描いてみたいと思います。正八角形とは、八辺の長さがすべて等しく、8つの内角がすべて等しい八角形のことです。今回のチャレンジ問題にしますので、頑張って考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

線分ABが与えられているとき、線分ABが一边となるような正八角形ABCDEFGHを、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。

考え方

正八角形が描けたとして、その対角線同士がどのように交わっているのかを考えると、描き方の手掛かりが見えてくるでしょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

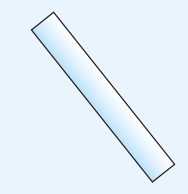
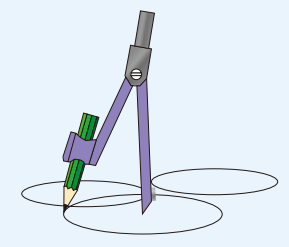
コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするとき使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

根本原理

- ・ 定規で、2点を通る直線が引ける。
- ・ コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- ・ 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる(3つの角も互いに等しい)。
- ・ 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる(残りの辺と角も互いに等しい)。
- ・ 二等辺三角形の底角は等しい。
- ・ 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- ・ 対頂角は等しい。
- ・ 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。
- ・ 2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角が等しい。
- ・ 三角形の内角の和は180度である。

図を描くときの注意

- ・ 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。



チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。