数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

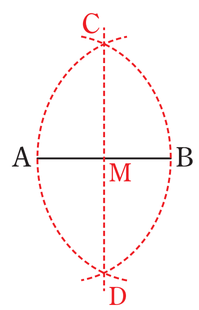
第99回 ある条件をみたす点の作図2

過去の記事の目次はこちらから
https://www.seg.co.jp/blog-category/math-world/

今回も、ある条件をみたす点の作図について考えます。

いろいろな作図法の確認

中点や線分の垂直二等分線の描き方を確認しておきます。線分ABが与えられているとき、点Aを中心とし半径ABの円と点Bを中心とし半径ABの円を描き、その2円の交点をC、Dとします。このとき、2点C、Dを通る直線を描けば、ABとCDの交点Mが線分ABの中点になっており、CDが線分ABの垂直二等分線になっています。証明を知りたい人は、第4回（2016年4月21日付）の記事を見てください。

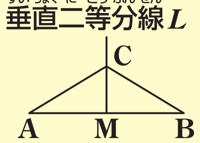


二等辺三角形になることの証明

チャレンジ問題への準備として、ある条件をみたす三角形が二等辺三角形になることを確認してもらいます。次の問題を考えてみてください。

問題1

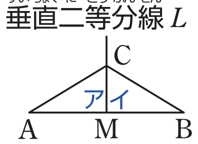
線分ABの中点Mを通りABと垂直な直線L（線分ABの垂直二等分線といいます）上に、点Cがあります。このとき、三角形ABCはAC＝BCの二等辺三角形であることを証明してみましょう。



考え方 ACとBCが等しいことを証明するためには、どの根本原理を使うとよいでしょうか。

証明 図のように角ア、イをおきます。問題の仮定より、角ア＝角イ…①、AM＝BM…②です。

△ACMと△BCMにおいて、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、CMは共通と①②より、△ACMと△BCMはぴったり重なるとわかります。よって、AC＝BCとわかるので、△ABCはAC＝BCの二等辺三角形であることがわかりました。

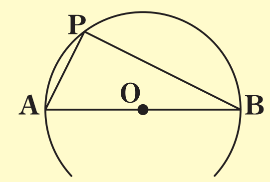


直径に対する円周角

もうひとつ、チャレンジ問題への準備として、直径に対する円周角が90度であることを確認してもらいます。次の問題を考えてみてください。

問題2

中心Oの円Oにおいて、直径ABとA、B以外の円周上の点Pに対して、PAとPBのなす角（直径の円周角といいます）は90度であることを証明してみましょう。

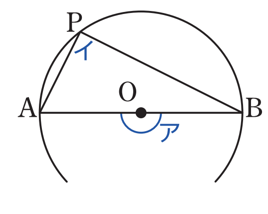


考え方 円周角と中心角の関係を考えてみましょう。

証明 図のように角ア、イをおきます。

「3点A、O、Bがこの順番で一直線上にあるならば、OAとOBのなす角は180度である」ことから、角ア＝180度…①です。「ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である」ことから、角イ＝角ア÷2…②です。

①②より、角イ＝180度÷2＝90度とわかるので、PAとPBのなす角は90度であることが証明できました。

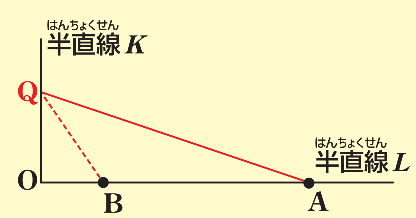


ある条件をみたす点の作図

それでは、問題1 問題2をヒントに、今回のチャレンジ問題に取り組んでみましょう。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

点Oを始点とする垂直な半直線Kと半直線Lがあたえられていて、L上に点Aが、線分OA上に、長さが2OB＜ABとなる点Bがあたえられています。このとき、K上に点Qを、AOとAQのなす角の2倍がQAとQBのなす角と等しくなるように、定規とコンパスを用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方 問題1 問題2 を考えると……。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

〈根本原理〉

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図1）。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である（図3）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分であり、共通の弧に対する円周角は等しい。
- 円の直径を一辺とし、円周上に3つ目の頂点がある三角形は、直径を斜辺とする直角三角形である。
- 円に内接する四角形において、向かい合う二角の和は180度であり、1つの内角とその向かい合う内角に対する外角は等しい。
- 円の接線と弦のなす角は、その弦を見込む円周角と等しい。

図1 対頂角

図2 錯角

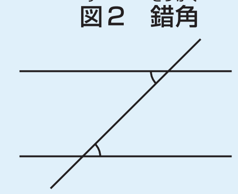
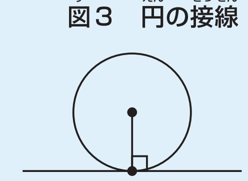


図3 円の接線



〈図を描くときの注意〉

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。