



数学の世界をのぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

第97回

ある条件をみたす正方形の作図



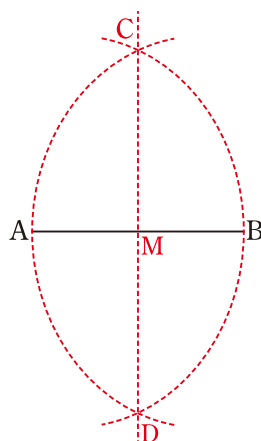
過去の記事の目次はこちら

<https://www.seg.co.jp/blog-category/math-world/>

今回は、ある条件をみたす正方形の作図について考えます。

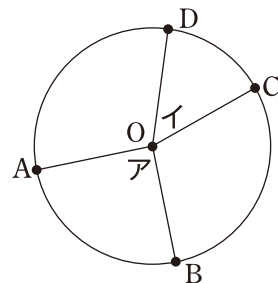
線分の垂直二等分線の作図法

線分の垂直二等分線の描き方を確認しておきます。線分ABがあたえられているとき、点Aを中心とし半径ABの円と点Bを中心とし半径ABの円を描き、その2円の交点をC、Dとします。このとき、2点C、Dを通る直線を描けば、ABとCDの交点Mが線分ABの中点になっており、CDが線分ABの垂直二等分線になっています。証明を知りたい人は、第4回の記事(2016年4月21日付)を見てください。



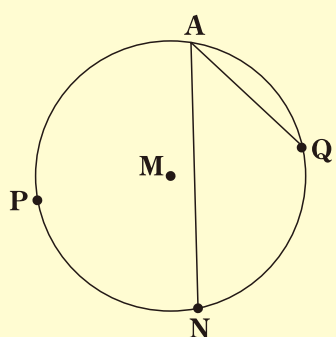
扇形の中心角と弧長の比例

同じ円内の扇形OABと扇形OCDにおいて、中心角を、図のように角A、イとおくと、角A：角イ＝弧ABの長さ：弧CDの長さになり立ちます。このことを用いて、次の問題を考えてみましょう。



問題1

図のように、中心M、直径PQの円Mがあたえられていて、さらに、半円弧PQを二等分する点NとPQに対してNと反対側の半円弧上に点Aがあたえられています。このとき、AQとANのなす角が45度であることを証明してみましょう。

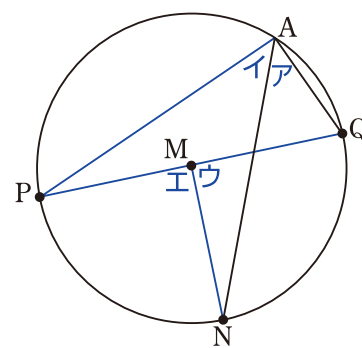


考え方

円周角の根本原理は……。

証明

図のように、角Aからエをおきます。問題の仮定から、Mは円Mの中心…①、PQは円Mの直径…②であり、Nは半円弧PQを二等分する点なので、弧PNの長さ＝弧QNの長さ…③です。



「ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である」ことから、①より、

角A＝角エ÷2…④、角イ＝角エ÷2…⑤です。

「同じ円内の2つの扇形に対して、中心角と弧長が比例する」ことから、角ウ＝角エ…⑥です。

④⑤⑥より、角A＝角イ…⑦です。

「円の直径を一边とし、円周上に3つ目の頂点がある三角形は、直径を斜辺とする直角三角形である」ことから、

②より、角A＋角イ＝90度…⑧です。

⑦⑧より、2×角A＝90度なので、角A＝90度÷2＝45度

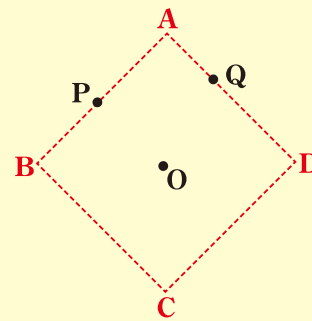
よって、AQとANのなす角が45度であることが証明できました。

ある条件をみたす正方形の作図

それでは、問題1をヒントに、今回のチャレンジ問題に取り組んでみましょう。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

ある正方形ABCDの対角線の交点Oと辺AB上の点P、辺AD上の点Qの3点があたえられているとき、元の正方形ABCDを定規とコンパスを用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

最終目標の正方形と問題1がどうつながるか……。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときを使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

(根本原理)

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一边とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一边が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。

3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。

対頂角は等しい(図1)。

2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい(図2)。

三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。

ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である(図3)。

平行四辺形の向かい合う辺は等しい。

3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。

二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。

二角が互いに等しい三角形は相似である。

三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。

ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分であり、共通の弧に対する円周角は等しい。

円の直径を一边とし、円周上に3つ目の頂点がある三角形は、直径を斜辺とする直角三角形である。

円に内接する四角形において、向かい合う二角の和は180度であり、1つの内角とその向かい合う内角に対する外角は等しい。

円の接線と弦のなす角は、その弦を見込む円周角と等しい。

(図を描くときの注意)

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

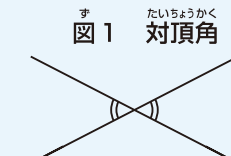


図1 対頂角

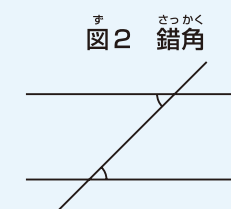


図2 錯角

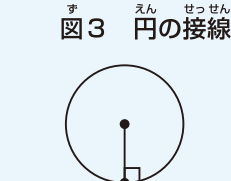


図3 円の接線

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。