数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

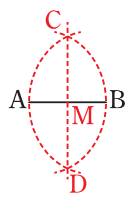
コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

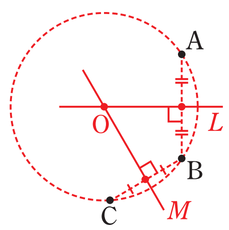
第92回 ある条件をみたす円の作図２

今回も、ある条件をみたす円の作図について考えます。

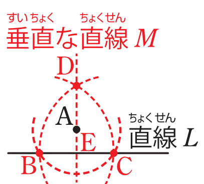
いろいろな作図法の確認



まずは、線分の垂直二等分線や中点の描き方です。線分ABが与えられているとき、点Aを中心とし半径ABの円と点Bを中心とし半径ABの円を描き、その2円の交点をC、Dとします。このとき、2点C、Dを通る直線を描けば、ABとCDの交点Mが線分ABの中点になっており、CDが線分ABの垂直二等分線になっています。証明を知りたい人は、第4回の記事（2016年4月21日付）を見てください。

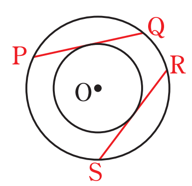


次に、一直線上にない3点A、B、Cが与えられているとき、3点A、B、Cを通る円の描き方です。右の図のように、線分ABの垂直二等分線Lと線分BCの垂直二等分線Mを、上で解説したように描きます。するとLとMの交点Oが3点A、B、Cを通る円の中心になるので、Oを中心とし半径OAの円を描けばよいことになります。証明を知りたい人は、第45回の記事（2019年9月19日付）を見てください。



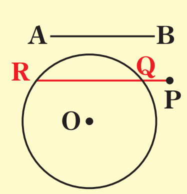
最後に、直線LとL上にない点Aが与えられているとき、Aを通りLと垂直な直線Mの描き方です。点Aを中心とする円を1つ描き、その円とLとの交点をB、Cとします。点Bを中心とする半径BCの円と点Cを中心とする半径BCの円を描き、それら2円の交点のうち1つをDとします。そして、2点AとDを通る直線を描けば、その直線がLと垂直な直線Mになります。証明は、△ABDと△ACDがぴったり重なることを示して、直線ADと直線Lの交点をEとして、△BDEと△CDEがぴったり重なることを示せば、このことから垂直であるとわかります。

与えられた条件にあてはまる円の弦の作図



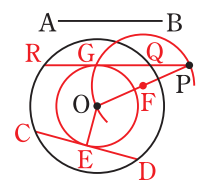
「中心がOの2つの同心円に対し、外円の弦PQとRSは、内円と接するとき、PQ＝RSである」…☆（証明を知りたい人は第54回の記事（2020年6月18日付）を見てください）ことを用いて、以下の問題を考えてみましょう。

問題１



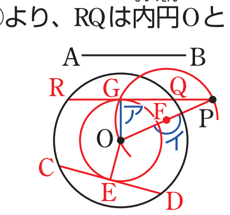
中心がOの円Oと円Oの外部の点P、円Oの直径より短い線分ABが与えられています。このとき、線分ABと長さが等しい円Oの弦QRで、QRの延長線がPを通るものをコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。

考え方 ☆の性質をどう利用するか考えてみましょう。



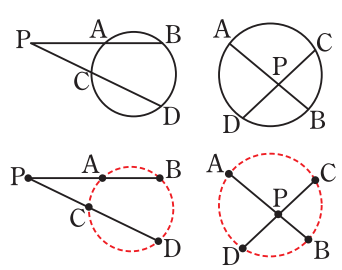
描き方 円O上に点Cをとり、点Cを中心とし半径ABの円Cを描き、この円Cと円Oとの2つの交点のうち1つをDとします。そして、点Oを通りCDと垂直な直線を描き、CDとの交点をEとします。次に、点Oを中心とし半径OEの円を描き、この円を内円Oとよぶことにし、与えられていた円Oを外円Oとよぶことにします。線分OPの中点Fを描き、Fを中心とし直径OPの円Fを描き、円Fと内円Oの2つの交点のうちの1つをGとします。最後に2点P、Gを通る直線を描き、この直線と外円Oとの交点をQ、Rとすると、このQRが求める図形になっています。

証明 図の描き方から、OEとCDは垂直…①です。図のように角ア、イをおきます。「ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である」ことから、角ア＝角イ÷2…②です。「3点O、F、Pがこの順番で一直線上にあるならば、FOとFPのなす角は180度である」ことから、角イ＝180度…③です。②③より、角ア＝180度÷2＝90度…④です。「ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である」ことから、①より、CDは内円Oと接する…⑤、④より、RQは内円Oと接する…⑥とわかります。☆の性質から、⑤⑥より、



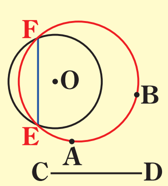
CD＝RQであり、図の描き方からAB＝CDなので、AB＝RQとわかります。RQはPを通ることも考えると、図が正しく描けていることが証明できました。

ある条件をみたす円の作図２



第89回の記事で、「右の図の場合に、PA×PB＝PC×PDである」こと（「方べきの定理」といいます）や、「PA×PB＝PC×PDとなるような5点A、B、C、D、Pが、右の図のように与えられているとき、4点A、B、C、Dを通る円が描ける」こと（「方べきの定理の逆」といいます）にふれました。このことと 問題１ を用いて、今回のチャレンジ問題に取り組んでみましょう。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題



中心がOの円Oと円Oの外部に点A、B、さらに、円Oの直径より短い線分CDが右の図のように与えられています。ただし、線分ABの垂直二等分線上に中心Oがないとします。このとき、点A、Bと円O上の点E、Fを通り線分EFの長さが線分CDと等しくなるような円を1つ定規とコンパスを用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。

考え方 方べきの定理やその逆、問題１ などをヒントに考えてみましょう。

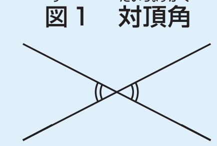
証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

〈根本原理〉

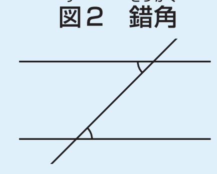
- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図1）。

図1 対頂角



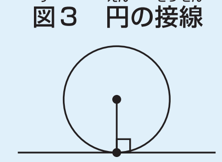
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。

図2 錯角



- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である（図3）。

図3 円の接線



- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。
- 円の直径を一辺とし、円周上に3つ目の頂点がある三角形は、直径を斜辺とする直角三角形である。
- 円に内接する四角形において、向かい合う二角の和は180度であり、1つの内角とその向かい合う内角に対する外角は等しい。

〈図を描くときの注意〉

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。