



数学の世界をのぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

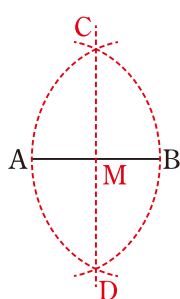
第91回

ある条件をみたす円の作図

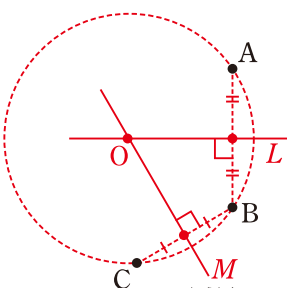
今回は、ある条件をみたす円の作図について考えます。

いろいろな作図法の確認

まずは、線分の垂直二等分線の描き方をおさらいしておきます。線分ABが与えられているとき、点Aを中心とし半径ABの円と点Bを中心とし半径ABの円を描き、その2円の交点をC、Dとします。このとき、2点C、Dを通る直線を描けば、ABとCDの交点Mが線分ABの midpoint になっており、CDが線分ABの垂直二等分線になっています。証明を知りたい人は、第4回の記事(2016年4月21日付)をご覧ください。



次に、一直線上にない3点A、B、Cが与えられているとき、これらの3点A、B、Cを通る円を描く方法は、例えば、以下のようになります。右の図のように、線分ABの垂直二等分線Lと線分BCの垂直二等分線Mを、上で解説したように描きます。すると、LとMの交点Oが3点A、B、Cを通る円の中心になるので、Oを中心とし半径OAの円を描けばよいことになります。証明を知りたい人は第45回の記事(2019年9月19日付)をご覧ください。

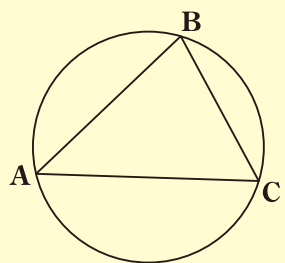


外接円の作図についての確認

一直線上にない3点を通る円は、三角形の3頂点を通る円(三角形の外接円)といいます)と考えられます。ここでは、外接円の作図について確認をしておきます。

問題1

三角形の外接円は、ただ1つだけ存在することを証明してみましょう。

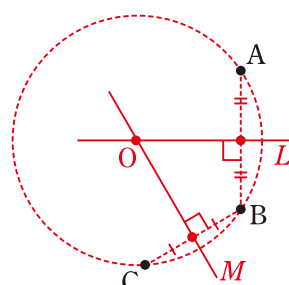


考え方

存在することは、上の記事の作図で示しているため、1つだけであることを示せばよいわけです。

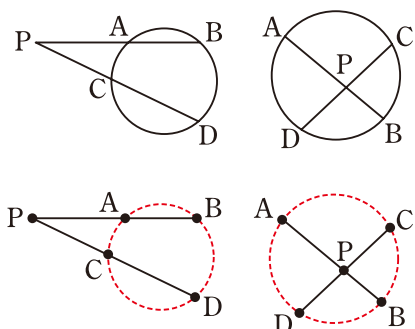
証明

上の記事の作図から、存在することは示されているので、ただ1つであることを示します。上の記事の作図の際の記号をそのまま利用します。線分の中点はただ1つ存在し、線分上のある点を通る線分と垂直な直線もただ1つ存在するので、線分ABの垂直二等分線Lと線分BCの垂直二等分線Mはそれぞれただ1つだけ存在するとわかります。2直線の交点はただ1つなので、直線LとMの交点Oもただ1つです。よって、外接円の中心Oはただ1つしかなく、Oから頂点までの長さもただ1つに決まるので、外接円はただ1つであることがわかります。



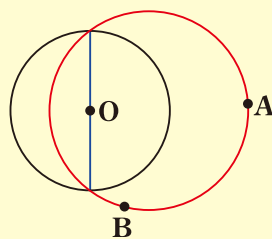
ある条件をみたす円の作図

第89回の記事で、「右の図の場合に、 $PA \times PB = PC \times PD$ である」とこと(「方べきの定理」といいます)や、「 $PA \times PB = PC \times PD$ となるような5点A、B、C、D、Pが、右の図のように与えられているとき、4点A、B、C、Dを通る円が描ける」とこと(「方べきの定理の逆」といいます)にふれました。このことと問題1を用いて、今回のチャレンジ問題に取り組んでみましょう。がんばって考えてみてくださいね。



チャレンジ問題

中心がOの円Oと円Oの外部に点A、Bが右の図のように与えられています。このとき、点A、Bと円Oの直径の両端点の4点を通る円を定規とコンパスを用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

方べきの定理やその逆、問題1などをヒントに考えてみましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときには根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

根本原理

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい(図1)。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい(図2)。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である(図3)。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。
- 円の直径を一辺とし、円周上に3つ目の頂点がある三角形は、直径を斜辺とする直角三角形である。
- 円に内接する四角形において、向かい合う二角の和は180度であり、1つの内角とその向かい合う内角に対する外角は等しい。

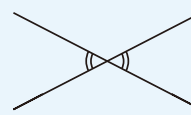


図1 対頂角

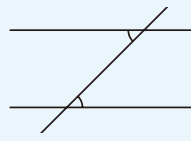


図2 錯角

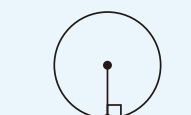


図3 円の接線

図を描くときの注意

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。