企画・構成｜科学的教育グループ SEG®

バックナンバーは右記アドレスにて公開中！>https://www.seg.co.jp/

数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

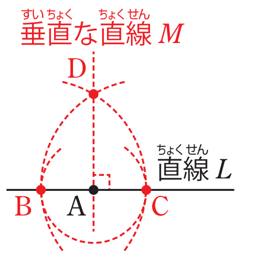
コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

第90回 ある条件をみたす点の作図

今回は、ある条件をみたす点の作図について考えます。

作図法の確認



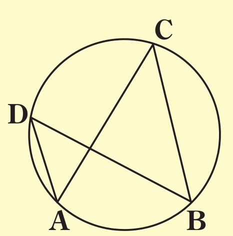
直線LとL上の点Aが与えられているときの、Aを通りLと垂直な直線Mの描き方です。点Aを中心とする円を1つ描き、その円と直線Lとの交点をB、Cとします。点Bを中心とする半径BCの円と点Cを中心とする半径BCの円を描き、それら2円の交点のうちの1つをDとします。そして、2点AとDを通る直線を描けば、その直線がLと垂直な直線Mになるのでした。証明を知りたい人は、第8回の記事（2016年8月18日付）を見てください。

円についての性質の確認

ここでは、円についての性質を2つ確認しておきます。それでは問題です。

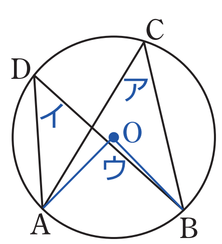
問題1

円周上に4点A、B、C、Dがこの順で与えられているとき、CAとCBのなす角とDAとDBのなす角が等しい、すなわち、弧ABに対する円周角は等しいことを証明してみましょう。



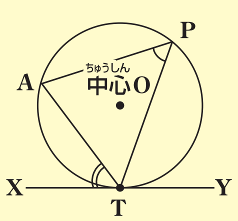
考え方 ある原理を使えば、簡単に証明できます。

証明 円の中心をOとし、図のように、角をアからウとおきます。「ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である」ことから、角ア＝角ウ÷2＝角イとわかります。したがって、弧ABに対する円周角は等しいことが証明できました。



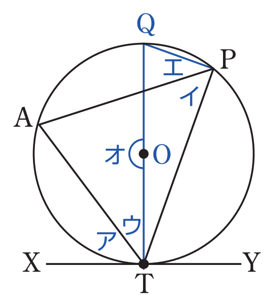
問題2

右の図において、「TXとTAのなす角（接線と弦のなす角）」と「PAとPTのなす角（その弦を見込む円周角）」が等しいことを証明してみましょう。



考え方 補助線を引いて、問題1と接線の性質を使います。

証明 円の中心をOとし、TOのOの方への延長線と円Oとの交点をQとし、図のように、角アからオをおきます。角ウとエはどちらも弧AQに対する円周角なので、問題1から、角ウ＝角エ…①です。「ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である」ことから、TXは接線なので、角ア＋角ウ＝90度、よって、角ア＝90度－角ウ…②です。また、「3点T、O、Qがこの順に一直線上にあるならば、OTとOQのなす角は180度である」ことから、角オ＝180度…③です。角イ＋角エは弧QATの円周角なので、「ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である」ことから、角イ＋角エ＝角オ÷2…④です。③④より、角イ＋角エ＝180度÷2＝90度なので、角イ＝90度－角エ…⑤です。①②⑤より、角ア＝角イ、すなわち、「接線TXと弦TAのなす角が、弦TAを見込む円周角と等しい」ことが証明できました。

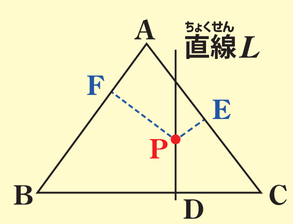


ある条件をみたす点の作図

第88回の記事で、「四角形ABCDの向かい合う2つの内角の和が180度のとき、4点A、B、C、Dを通る円が描ける」ことにふれました。このことと問題1、問題2を用いて、今回のチャレンジ問題に取り組んでみましょう。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

AB＝ACの二等辺三角形ABCと辺BC上の点Dを通りBCと垂直な直線Lが与えられています。直線L上で三角形の内部の点PからCA、ABに下ろした垂線の足をE、Fとするとき、PD×PD＝PE×PFとなるような点Pを定規とコンパスを用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

その点Pが描けたとすると△PDEと△PFDは……。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

〈根本原理〉

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図1）。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である（図3）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。
- 円の直径を一辺とし、円周上に3つ目の頂点がある三角形は、直径を斜辺とする直角三角形である。
- 円に内接する四角形において、向かい合う二角の和は180度であり、1つの内角とその向かい合う内角に対する外角は等しい。

図1 対頂角

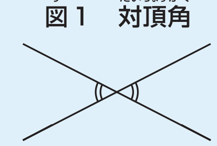


図2 錯角

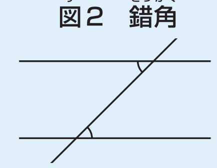
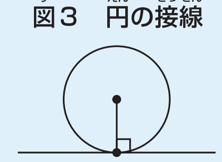


図3 円の接線



〈図を描くときの注意〉

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。

このコーナーは原則として、毎月第3週の木曜日に掲載します。