数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

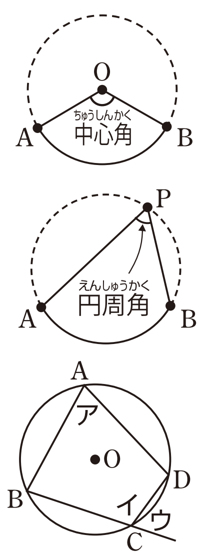
コンパスと定規で描ける図形の世界
……ユークリッド幾何の世界……

第89回 方べきの定理と４点を通る円が描けるための条件

今回も、４点を通る円が描けるための条件について考えます。

円についてのいくつかの性質の確認

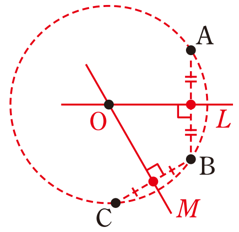
まず、基本になるのは、「ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である」という原理です。ここで、円周角と中心角とは、例えば右の図の場合には、PAとPBのなす２つの角のうち角の中に弧ABを含む方が弧ABの円周角、OAとOBのなす２つの角のうち角の中に弧ABを含む方が弧ABの中心角です。証明が知りたい人は、第40回の記事（2019年４月18日付）を見てください。



次に、「４点A、B、C、Dが、この順に円O上にあるとき、四角形ABCDの向かい合う２つの内角の和は180度であり、１つの内角とその角に向かい合う内角に対する外角は等しい」です。例えば右の図であれば、内角ア＝外角ウ（内角イに対する外角）です。証明を知りたい人は、第56回の記事（2020年８月20日付）を見てください。

３点を通る円が描けることの確認

一直線上にない３点A、B、Cが与えられているとき、これらの３点A、B、Cを通る円を描くには、右の図のように、線分ABの垂直二等分線Lと線分BCの垂直二等分線Mを描き、LとMの交点をOとします。すると、Oが３点A、B、Cを通る円の中心になるので、Oを中心とし半径OAの円を描けばよいことになります。証明を知りたい人は第45回の記事（2019年９月19日付）を見てください。

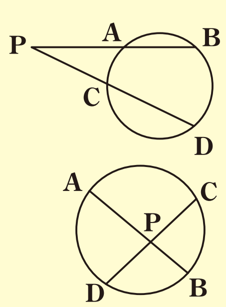


方べきの定理

ここでは、４点を通る円が描けるための条件の３つ目〔１、２つ目は第88回の記事（2023年４月20日付）を見てください〕を考える準備として、その逆にあたる「方べきの定理」を、証明してみます。それでは問題です。

問題１

１つの円とその円の周上以外に点Pが与えられています。点Pを通り与えられた円と２点で交わる直線を２本引くと、図は点Pが円外のときと円内のときの２つの場合が考えられます。それぞれの直線と円との交点を、図のようにA、B、C、Dとおくとき、PA×PB＝PC×PDであることを証明してみましょう。

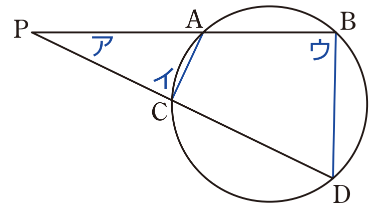


考え方

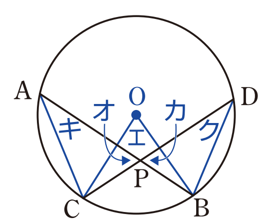
２数の積が等しいという等式は、比の等式から導けます。

証明

まず、点Pが円外のときから考えます。右の図のように、角をアからウとおきます。△PACと△PDBにおいて、４点A、B、D、Cはこの順で円上にあり、「４点A、B、D、Cがこの順で円上にあるとき、四角形ABDCの１つの内角とその角に向かい合う内角に対する外角は等しい」ことから、角イ＝角ウ…①です。「二角が互いに等しい三角形は相似である」ことから、①と角アが共通より、△PACと△PDBは相似です。したがって、PA：PC＝PD：PBです。よって、PA×PB＝PC×PDとわかりました。



次に、点Pが円内のときを考えます。右の図のように、円の中心をOとし、角をエからクとおきます。△PACと△PDBにおいて、「対頂角は等しい」ことから、角オ＝角カ…②です。「ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である」ことから、角キ＝角エ÷２＝角ク…③です。「二角が互いに等しい三角形は相似である」ことから、②③より、△PACと△PDBは相似です。したがって、PA：PC＝PD：PBです。よって、PA×PB＝PC×PDとわかりました。以上から、どちらの場合にもPA×PB＝PC×PDであることが証明できました。

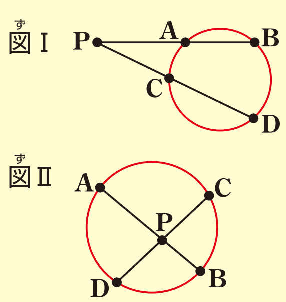


４点を通る円が描けるための条件３

それでは、今回のチャレンジ問題です。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

PA×PB＝PC×PDとなるような５点A、B、C、D、Pが、P、A、BとP、C、Dがそれぞれ一直線上にあるように、右の図のように与えられています。このとき、４点A、B、C、Dを通る円が描けることを証明してみましょう。



考え方 ４点を通る円が描けないとすると、矛盾が……。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

〈根本原理〉

- 定規で、２点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- ３点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、３点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図１）。
- ２直線において、錯角の位置の角が等しければ、その２直線は平行である。逆に、２直線が平行であれば、その２直線に対する錯角の位置の角は等しい（図２）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である（図３）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- ３本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る２本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。
- 円の直径を一辺とし、円周上に３つ目の頂点がある三角形は、直径を斜辺とする直角三角形である。

図１　対頂角

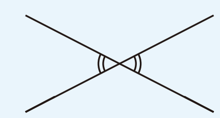
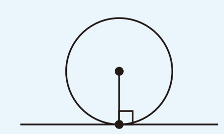


図２　錯角

図３　円の接線



〈図を描くときの注意〉

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、４面をご覧ください。