数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

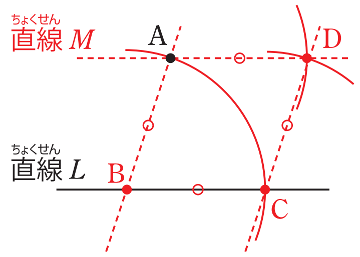
……ユークリッド幾何の世界……

第87回 条件をみたす線分の作図

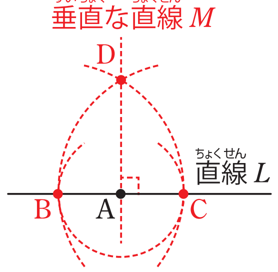
今回は、ある条件をみたす線分の作図について考えます。

いくつかの作図法の確認

まず、平行線の描き方を確認しておきましょう。直線LとL上にない点Aが与えられているとき、点Aを通り直線Lと平行な直線Mをコンパスと定規を用いて描く方法の一つは、右の図のようにひし形ABCDを描くことでした。証明が知りたい人は、第34回の記事（2018年10月18日付）を見てください。

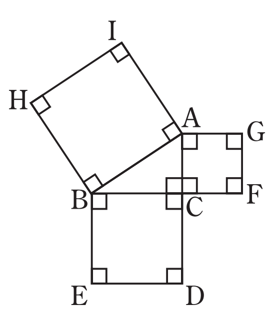


次に、直線LとL上の点Aが与えられているときの、Aを通りLと垂直な直線Mの描き方です。点Aを中心とする円を1つ描き、その円と直線Lとの交点をB、Cとします。点Bを中心とする半径BCの円と点Cを中心とする半径BCの円を描き、それら2円の交点のうちの1つをDとします。そして、2点AとDを通る直線を描けば、その直線がAを通りLと垂直な直線Mになるのでした。証明を知りたい人は、第8回の記事（2016年8月18日付）を見てください。



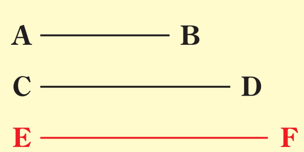
ピタゴラスの定理を用いた作図

ピタゴラスの定理は、「直角三角形の直角をはさむ二辺をそれぞれの一辺の長さとする2つの正方形の面積の和が、直角の向かいの斜辺を一辺の長さとする正方形の面積と等しい」という定理でした。証明を知りたい人は、第19回の記事（2017年7月20日付）を見てください。この定理を用いて解決される、チャレンジ問題のヒントとなる問題を解決しておきましょう。



問題1

線分ABとCDが与えられているとき、EF×EF＝AB×AB＋CD×CDをみたす線分EFを、定規とコンパスを用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。

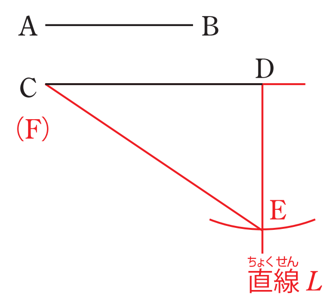


考え方

ピタゴラスの定理をどう利用するかを考えましょう。

描き方

線分CDのDの方への延長線を描き、本文で確認したように、点Dを通り直線CDに垂直な直線Lを描きます。次にDを中心とし半径ABの円Dを描き、直線Lと円Dの2つの交点のうちの1つをEとします。2点EとCを結ぶ直線を描き、点Cを点Fと呼ぶことにすると、この線分EFが求める線分になっています。



証明

図の描き方から、DCとDEのなす角は90度…①、DE＝AB…②です。△CDEにおいて、ピタゴラスの定理を用いると、①より、CE×CE＝CD×CD＋DE×DE…③です。

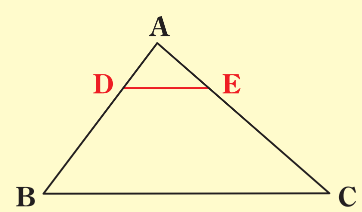
ここで、CをFと呼ぶことにすると、②③より、FE×FE＝CD×CD＋AB×ABなので、図が正しく描けていることが証明できました。

条件をみたす線分の作図

それでは、今回のチャレンジ問題です。問題1が解決のカギになります。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

△ABCの辺AB上に点D、AC上に点Eを、AD×AD＋DE×DE＝BD×BDで、DEとBCが平行となるように定規とコンパスを用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

問題1がヒントになります。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

〈根本原理〉

・定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
・三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
・二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
・一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
・斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
・二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
・3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
・対頂角は等しい（図1）。
・2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。
・三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
・ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である（図3）。
・平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
・3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
・二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
・二角が互いに等しい三角形は相似である。
・三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
・ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。
・円の直径を一辺とし、円周上に3つ目の頂点がある三角形は、直径を斜辺とする直角三角形である。

図1 対頂角

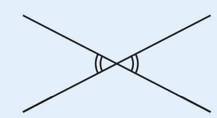


図2 錯角

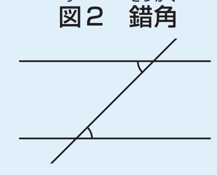
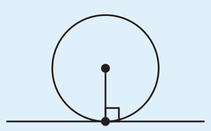


図3 円の接線



〈図を描くときの注意〉

・定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。