



コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

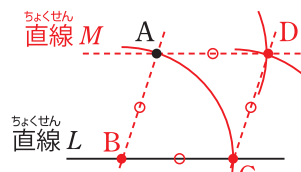
第85回

条件をみたます垂線を作図しよう

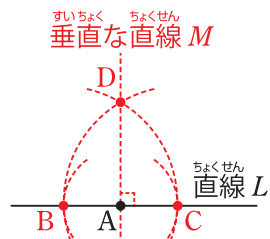
今回は、ある条件をみたます垂線の作図について考えます。

いくつかの作図法の確認

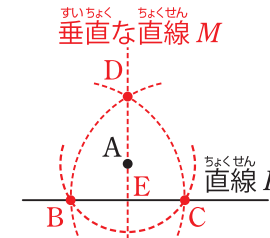
まず、平行線の描き方を確認しておきましょう。直線LとL上にない点Aが与えられているとき、点Aを通り直線Lと平行な直線Mをコンパスと定規を用いて描く方法の一つは、右の図のようにひし形ABCDを描くことでした。証明が知りたい人は、第34回の記事(2018年10月18日付)を見てください。



次に、直線LとL上の点Aが与えられているときの、Aを通りLと垂直な直線Mの描き方です。点Aを中心とする円を1つ描き、その円と直線Lとの交点をB、Cとします。点Bを中心とする半径BCの円と点Cを中心とする半径BCの円を描き、それら2円の交点のうち1つをDとします。そして、2点AとDを通る直線を描けば、その直線がLと垂直な直線Mになるのです。証明を知りたい人は、第8回の記事(2016年8月18日付)を見てください。



最後に、直線LとL上にない点Aが与えられているときの、Aを通りLと垂直な直線Mの描き方です。点Aを中心とする円を1つ描き、その円とLとの交点をB、Cとします。点Bを中心とする半径BCの円と点Cを中心とする半径BCの円を描き、それら2円の交点のうち1つをDとします。そして、2点AとDを通る直線を描けば、その直線がLと垂直な直線Mになります。証明は、三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なることから、△ABDと△ACDはぴったり重なることから、直線ADと直線Lの交点をEとして、△BDEと△CDEがぴったり重なることがわかり、このことから垂直であるとわかります。



線分の3等分点の作図

チャレンジ問題のヒントとなる問題を解決しておきましょう。

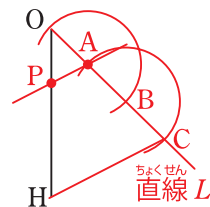
問題1

線分OH上に、 $OP : PH = 1 : 2$ となる点Pを、定規とコンパスを用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。

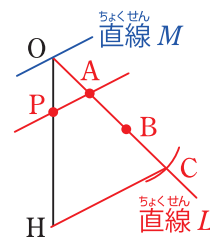


考え方 平行線が切りとる線分の比についての原理を利用すると……。

作図 点Oを通り点Hは通らない直線Lを描き、直線L上に点Aをとります。Aを中心とし半径OAの円Aを描き、直線Lと円Aとの交点のうちOでない方をBとします。Bを中心とし半径AB (= OA) の円Bを描き、直線Lと円Bとの交点のうちAでない方をCとします。2点C、Hを通る直線CHを描き、点Aを通り、直線CHと平行な直線を描きます。その直線と線分OHとの交点をPとすると、この点Pが求める点になります。



証明 図の描き方から、 $OA = AB = BC \dots ①$ 、 AP と CH は平行…②です。点Oを通りAPと平行な直線Mを考えます。APと直線Mは平行…③です。①より、 $OA : AC = OA : 2 \times OA = 1 : 2 \dots ④$ です。「3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい」ことから、②③より、 $OP : PH = OA : AC \dots ⑤$ です。④⑤より、 $OP : PH = 1 : 2$ です。したがって、図が正しく描けていることが証明できました。

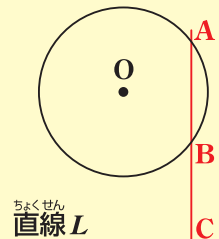


条件をみたます垂線の作図

それでは、今回のチャレンジ問題です。問題1が解決のカギになります。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

中心Oの円Oと円Oとは交わらない直線Lが与えられています。図のように、円Oと2点A、Bで交わり、直線Lと点Cで垂直に交わり、 $AB = BC$ となる直線を1つ、定規とコンパスを用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。ただし、円Oから直線Lまでの距離、すなわち、点Oから直線Lに引いた垂線の長さが円Oの半径の3倍より小さいとします。



考え方

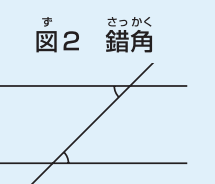
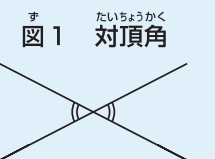
問題1がヒントになります。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするとき根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

(根本原理)

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい(図1)。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい(図2)。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である(図3)。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。
- 円の直径を一辺とし、円周上に3つ目の頂点がある三角形は、直径を斜辺とする直角三角形である。



(図を描くときの注意)

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。