数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

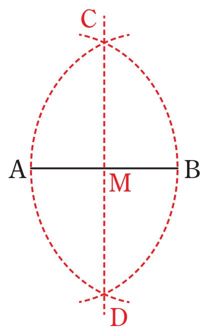
コンパスと定規で描ける図形の世界
……ユークリッド幾何の世界……

第82回 与えられた条件をみたす正方形を作図しよう

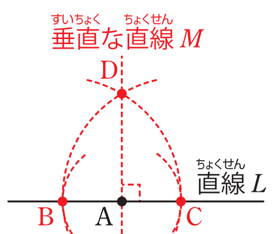
今回は、与えられた点を通り、与えられた円と接する正方形を作図することを考えます。

いくつかの作図法の確認

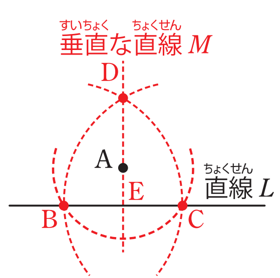
まず、線分ABの中点の描き方です。点Aを中心とし半径ABの円と点Bを中心とし半径ABの円を描き、その2円の交点をC、Dとします。このとき、2点C、Dを通る直線を描けば、ABとCDの交点Mが線分ABの中点になっています。証明を知りたい人は、第5回の記事（2016年5月19日付）を見てください。



次に、直線LとL上の点Aが与えられているときの、Aを通りLと垂直な直線Mの描き方です。点Aを中心とする円を1つ描き、その円と直線Lとの交点をB、Cとします。点Bを中心とする半径BCの円と点Cを中心とする半径BCの円を描き、それら2円の交点のうちの1つをDとします。そして、2点AとDを通る直線を描けば、その直線がLと垂直な直線Mになるのでした。証明を知りたい人は、第8回の記事（2016年8月18日付）を見てください。



最後に、直線LとL上にない点Aが与えられているときの、Aを通りLと垂直な直線Mの描き方です。点Aを中心とする円を1つ描き、その円とLとの交点をB、Cとします。点Bを中心とする半径BCの円と点Cを中心とする半径BCの円を描き、それら2円の交点のうちの1つをDとします。そして、2点AとDを通る直線を描けば、その直線がLと垂直な直線Mになります。証明は、三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なることから、△ABDと△ACDはぴったり重なることがわかるので、直線ADと直線Lの交点をEとして、△BDEと△CDEがぴったり重なることがわかり、このことから垂直であるとわかります。

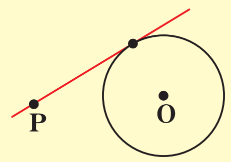


円の接線の作図

チャレンジ問題の準備として、円の接線の作図を確認します。

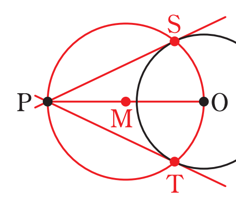
問題1

ある点Oを中心とする円Oと円外の点Pが与えられているとき、点Pを通る円Oの接線を、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。

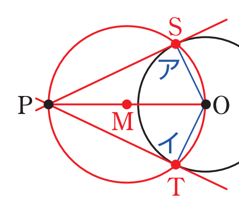


考え方 どんな直線が円の接線になるのかを考えてみましょう。

描き方 本文の記事のように、線分OPの中点Mを描きます。その点Mを中心とし半径OMの円を描くとその円が直径OPの円になります。直径OPの円と与えられた円Oの2交点をS、Tとすると、2点P、Sを結ぶ直線も2点P、Tを結ぶ直線も円Oの接線です。



証明 図のように角ア、イをおきます。「ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である」ことから、角ア＝(MPとMOのなす角)÷2＝180度÷2＝90度…①、角イ＝(MPとMOのなす角)÷2＝180度÷2＝90度…②です。「ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である」ことから、①より、2点P、Sを通る直線は円Oの接線、②より、2点P、Tを通る直線は円Oの接線です。以上で、正しく図が描けていることが証明できました。

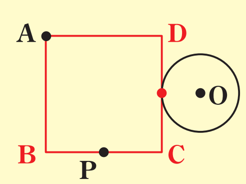


与えられた条件をみたす正方形を作図しよう

それでは、今回のチャレンジ問題です。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

2点A、Pと、中心がOの円Oが、図のように与えられています。このとき、直線BCが点Pを通り、直線CDが円Oと接するような正方形ABCDを、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方
辺CDをどう描くかがポイントです。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

〈根本原理〉

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図1）。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である（図3）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

図1　対頂角

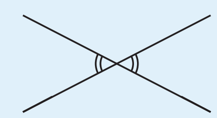


図2　錯角

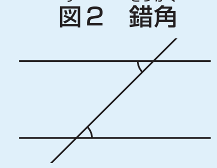
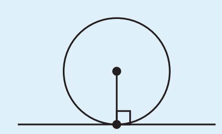


図3　円の接線



〈図を描くときの注意〉

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。