



数学の世界をのぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

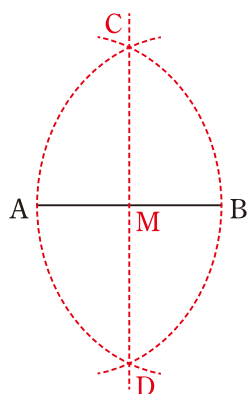
第80回

2円と接する3つ目の円を作図しよう

今回は、2円と接する3つ目の円を作図することを考えます。

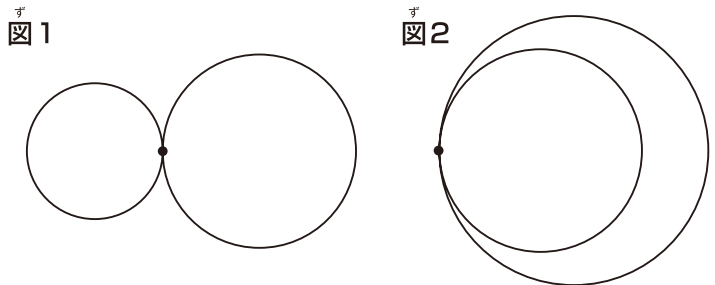
線分の垂直二等分線の作図法の確認

線分の垂直二等分線の描き方をおさらいしておきます。線分ABが与えられているとき、点Aを中心とし半径ABの円と点Bを中心とし半径ABの円を描き、その2円の交点をC、Dとします。このとき、2点C、Dを通る直線を描けば、ABとCDの交点Mが線分ABの中点になっており、CDが線分ABの垂直二等分線になっています。証明を知りたい人は、第4回の記事（2016年4月21日付）をご覧ください。



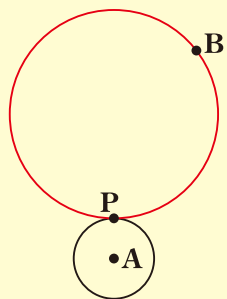
与えられた点を通り与えられた円と接する円の作図

それでは、チャレンジ問題の準備として、与えられた点を通り与えられた円と接する円の作図について確認しておきましょう。2つの円が1つだけ共有点をもつとき、それらの2円は接しているといい、下の図1の場合を外接する、図2の場合を内接するといいます。



問題1

点Aを中心とする円A、円A上の点P、円Aの外部の点Bが、図のように与えられています。円Aと点Pで外接し、点Bを通る円をコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。

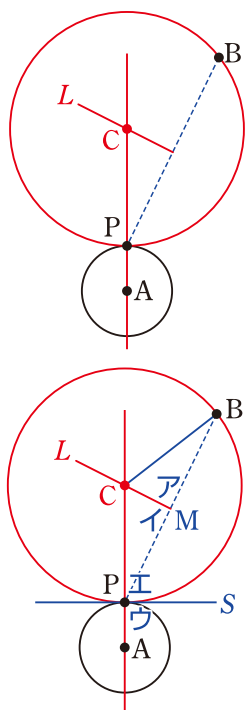


考え方

円の中心を作図するには……。

描き方

2点A、Pを通る直線APを描き、本文の記事のように、線分BPの垂直二等分線Lを描きます。直線APとLの交点をCとします。点Cを中心とし半径CPの円Cを描くと、この円Cが求める円になっています。



証明

直線LとBPの交点をMとし、点Pを通り直線APと垂直な直線をSとします。図のように、角アからエをおきます。図の描き方から、 $BM = PM$ …①、 $\text{角ア} = \text{角イ} = 90^\circ$ …②、 $\text{角ウ} = \text{角エ} = 90^\circ$ …③です。

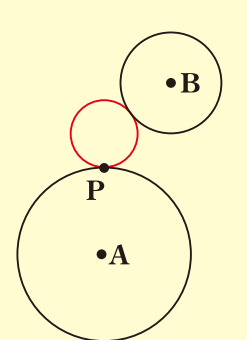
$\triangle BCM$ と $\triangle PCM$ において、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、①②とCMは共通より、 $\triangle BCM$ と $\triangle PCM$ はぴったり重なります。よって、 $BC = PC$ なので、円Cは点Bも通ります。「ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である」ことから、③より直線Sは点Pでの円Aと円Cの接線です。よって、円Aと円Cは点Pのみを共有するので、点Pで互いに接しているとわかります。したがって、正しく図が描けていることがわかりました。

2つの円と接する3つ目の円の作図

それでは、今回のチャレンジ問題です。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

点Aを中心とする円A、円A上の点P、点Bを中心とする（円Aより半径が小さい）円Bが図のように与えられています。円Aと点Pで外接し、円Bとも外接する円をコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

問題1をヒントに考えてみましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするとき根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

(根本原理)

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図1）。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である（図3）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

図1 対頂角

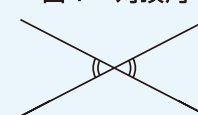


図2 錯角

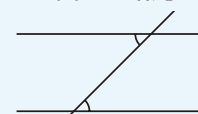
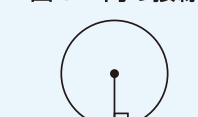


図3 円の接線



(図を描くときの注意)

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。