

数学の世界をのぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

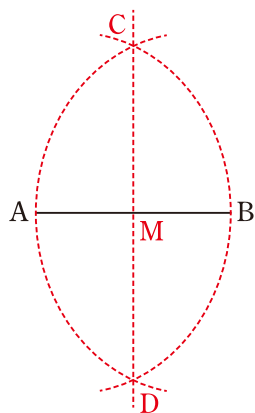
第78回

角が等しくなる点を作図しよう

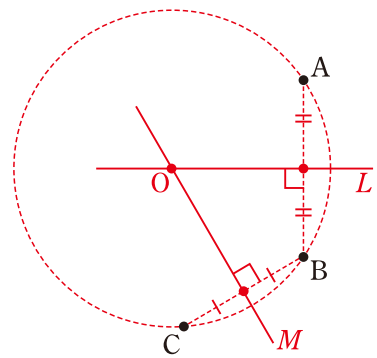
今回は、角が等しくなる点を作図することを考えます。

いくつかの作図法の確認

まずは、線分の垂直二等分線の描き方をおさらいしておきます。線分ABが与えられているとき、点Aを中心とし半径ABの円と点Bを中心とし半径ABの円を描き、その2円の交点をC、Dとします。このとき、2点C、Dを通る直線を描けば、ABとCDの交点Mが線分ABの中点になっており、CDが線分ABの垂直二等分線になっています。証明を知りたい人は、第4回の記事（2016年4月21日付）を見てください。



次に、一直線上にない3点A、B、Cが与えられているとき、これらの3点A、B、Cを通る円を描く方法は、例えば、以下ようになります。右の図のように、線分ABの垂直二等分線Lと線分BCの垂直二等分線Mを、上で解説したように描きます。



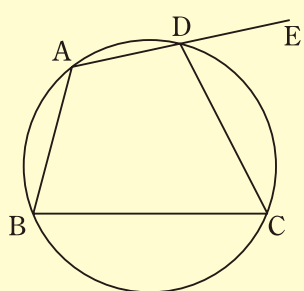
すると、LとMの交点Oが3点A、B、Cを通る円の中心になるので、Oを中心とし半径OAの円を描けばよいことになります。証明を知りたい人は第45回の記事（2019年9月19日付）を見てください。

円に内接する四角形の性質

それでは、チャレンジ問題への準備として、1つ問題を考えてみましょう。

問題1

円周上に4つの頂点がある四角形ABCDにおいて、ADのDの方への延長線上に点Eをとると、線分BAとBCのなす角と線分DCとDEのなす角が等しくなります。このことを証明してみましょう。

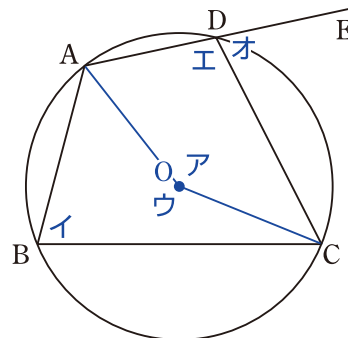


考え方

円周角と中心角の関係を考えてみましょう。

証明

円の中心をOとし、図のように、角A、イ、ウ、エ、オをおきます。「ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である」ことから、角イ=角A÷2…①、角エ=角ウ÷2…②です。角A+角ウ=360度…③なので、①②③より、角イ+角エ=(角A+角ウ)÷2=360度÷2=180度…④です。



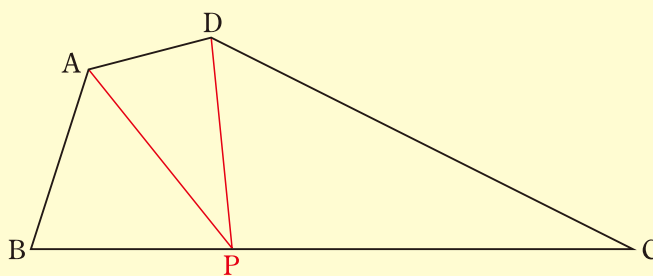
「3点A、D、Eがこの順番で一直線上にあるならば、DAとDEのなす角は180度である」ことから、角エ+角オ=180度…⑤です。④⑤より、角イ+角エ=角エ+角オなので、角イ=角オであるとわかります。これが証明すべきことでした。

角が等しくなる点を作図しよう

それでは、今回のチャレンジ問題です。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

下の図の四角形ABCDが与えられているとき、辺BC上に点Pを、ABとAPのなす角とDCとDPのなす角が等しくなるようにコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

問題1がヒントになります。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときには根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

(根本原理)

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい(図1)。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい(図2)。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である(図3)。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

図1 対頂角

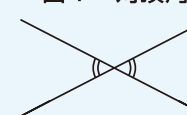


図2 錯角

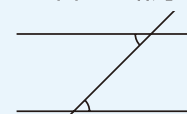
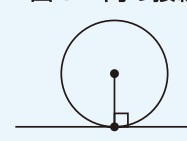


図3 円の接線



(図を描くときの注意)

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。