企画・構成｜科学的教育グループ SEG®

数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

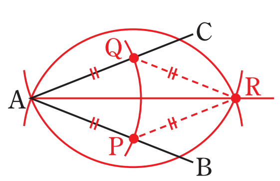
コンパスと定規で描ける図形の世界
……ユークリッド幾何の世界……

第75回 与えられた円の$\frac{1}{3}$の面積の同心円を描こう

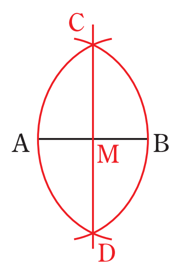
今回は、与えられた円の$\frac{1}{3}$の面積の同心円を作図します。

いくつかの作図法の確認

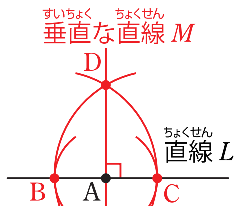
まずは、コンパスと定規を用いた角を二等分する直線の描き方をおさらいしておきます。ABとACのなす角において、線分AB上に点Pをとり、コンパスでAを中心とする半径APの円を描き、その円と線分AC、または、ACのCの方への延長線との交点をQとします。そして、コンパスで、Pを中心とする半径PAの円とQを中心とする半径QAの円を描き、それら2円の2交点のうちのAではない点をRとします。すると、直線ARが、ABとACの間の角の二等分線になります。証明は、第2回の記事（2016年2月18日付）にあります。



次に、線分の中点の描き方をおさらいしておきます。線分ABにおいて、点Aを中心とし半径ABの円と点Bを中心とし半径ABの円を描き、その2円の交点をC、Dとします。このとき、2点C、Dを通る直線を描けば、ABとCDの交点Mが線分ABの中点になっています。証明を知りたい人は、第5回の記事（2016年5月19日付）を見てください。



最後に、直線上のある点を通り、その直線と垂直な直線のコンパスと定規を用いた描き方も確認しておきましょう。直線LとL上の点Aが与えられているとき、点Aを通り直線Lと垂直な直線Mを描くには、右の図のように点Aを中心とする円を1つ描き、その円と直線Lとの交点をB、Cとします。次に、点Bを中心とする半径BCの円と点Cを中心とする半径BCの円を描き、それら2円の交点のうちの1つをDとします。そして、2点AとDを通る直線を描けば、その直線が直線Lと垂直な直線Mになるのでした。証明を知りたい人は、第8回の記事（2016年8月18日付）を見てください。

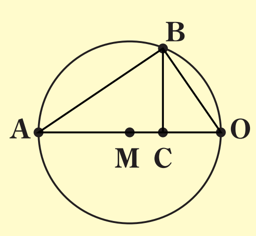


チャレンジ問題への準備

チャレンジ問題のヒントになる問題に取り組んでおきます。

問題1

中心M、直径AOの円Mと円上のA、O以外の点Bが与えられています。点BからAOに下ろした垂線の足をCとします。すなわち、AOとBCは垂直です。このとき、BO×BO＝AO×COであることを証明してみましょう。



考え方

三角形の相似を考えましょう。

証明

図のように、角アからエをおきます。△ABOと△BCOにおいて、「3点A、M、Oがこの順番で一直線上にあるならば、MAとMOのなす角は180度である」ことから、角エ＝180度…①です。

「ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である」ことから、角イ＝角エ÷2…②です。

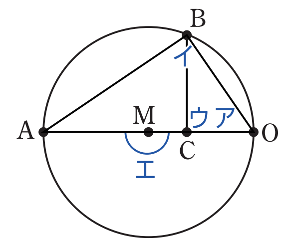
①②より、角イ＝180度÷2＝90度…③です。

問題の仮定から、角ウ＝90度なので、③より、角イ＝角ウ…④です。

「二角が互いに等しい三角形は相似である」ことから、④と角アは共通より、△ABOと△BCOは相似です。

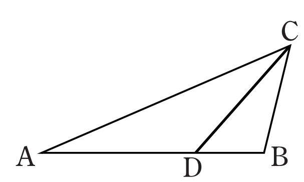
よって、対応する辺の比は等しいので、AO：BO＝BO：COです。

よって、BO×BO＝AO×COであるとわかりました。



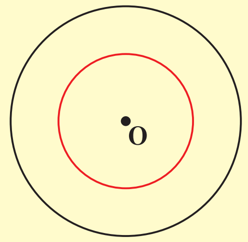
$\frac{1}{3}$の面積の同心円の作図

第59回の記事では、「△ABCのCAとCBのなす角の二等分線と辺ABとの交点をDとするとき、AC：CB＝AD：DBになる」ことを証明しました。このことと 問題1 を利用して、今回のチャレンジ問題を解決してみましょう。がんばって考えてみてくださいね。



チャレンジ問題

中心Oの円Oが与えられています。中心がOで、面積が円Oの$\frac{1}{3}$の円を、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

半径aの円の面積は$a \times a \times$円周率であり、その$\frac{1}{3}$の面積は$\frac{1}{3} \times a \times a \times$円周率です。このことから……。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

〈根本原理〉

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図1）。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である（図3）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

図1　対頂角

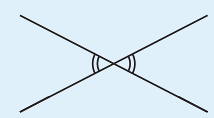


図2　錯角

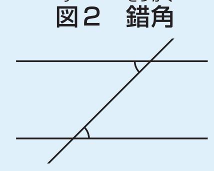
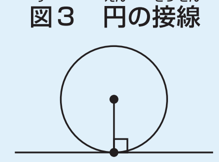


図3　円の接線



〈図を描くときの注意〉

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。