数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

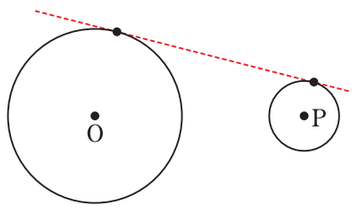
……ユークリッド幾何の世界……

第74回 円から与えられた長さを切り取る直線の作図

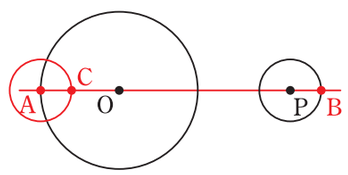
今回は、２円から与えられた長さを切り取る直線を作図します。

２円の共通接線の作図

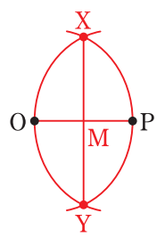
中心がOとPで半径の異なる円Oと円Pが与えられているとき、それら２円の両方に右の図の点線のように接する直線の描き方を確認しておきましょう。

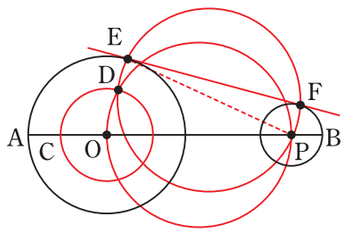


まず、２点O、Pを通る直線を描き、図のように円O、円Pとの交点をA、Bとします。そして、Aを中心とし半径BPの円を描き、その円と線分AOとの交点をCとします。



次に、Oを中心とし半径OPの円とPを中心とし半径OPの円を描き、それら２円の２つの交点をX、Yとします。そして、２点X、Yを結ぶ直線を描き、線分OPとの交点をMとします。その点Mを中心とし半径OMの円を描くとその円が直径OPの円になります。Oを中心とし半径OCの円を描き、その円と直径OPの円との２つの交点のうち、OPより上側の点をDとし、線分ODのDの方への延長線と与えられた円Oとの交点をEとします。





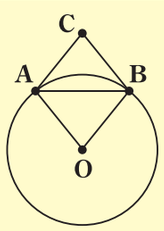
ここで、直径OPの円を描くのと同様にして直径EPの円を描き、与えられた円Pとの交点をFとすると、２点E、Fを通る直線が与えられた２円OとPの両方に接する直線になります。証明は、第14回の記事（2017年２月16日付）にあります。

チャレンジ問題への準備

チャレンジ問題のヒントになる問題に取り組んでおきます。

問題１

中心Oの円Oと円上の２点A、Bが与えられています。さらに、点Cが四角形OACBがひし形になるように与えられているとき、OCが線分ABの垂直二等分線であることを証明してみましょう。

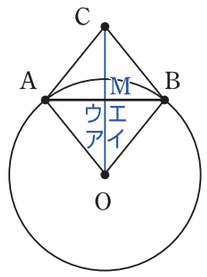


考え方

三角形がぴったり重なること（合同）を利用しましょう。

証明

ABとCOの交点をMとし、図のように、角アからエをおきます。△OACと△OBCにおいて、OACBはひし形なので、OA＝OB…①、AC＝BC…②です。「三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、①②とOCは共通より、△OACと△OBCはぴったり重なります。よって、角ア＝角イ…③です。



△OAMと△OBMにおいて、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、①③とOMは共通より、△OAMと△OBMはぴったり重なります。

よって、AM＝BM…④、角ウ＝角エ…⑤です。

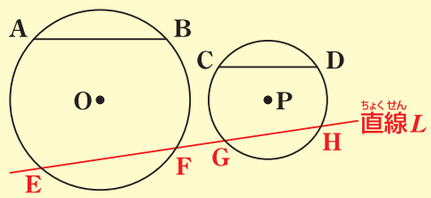
⑤より、AB⊥(垂直)OC…⑥なので、④⑥より、OCは線分ABの垂直二等分線であることがわかりました。

２円から与えられた長さを切り取る直線の作図

それでは、チャレンジ問題です。円の共通接線がカギになります。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

中心Oの円Oとその弦AB、中心Pの円Pとその弦CDが与えられているとき、図のように円Oと点EとF、円Pと点GとHで交わり、AB＝EF、CD＝GHとなるような直線Lをコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

問題１ と２円の共通接線をヒントに考えてみましょう。２円が円Oと円Pではないことに注意が必要です。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

〈根本原理〉

- 定規で、２点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- ３点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、３点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図１）。
- ２直線において、錯角の位置の角が等しければ、その２直線は平行である。逆に、２直線が平行であれば、その２直線に対する錯角の位置の角は等しい（図２）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である（図３）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- ３本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る２本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

図１　対頂角

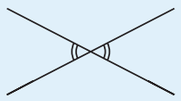


図２　錯角

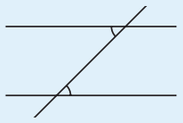
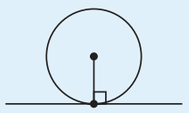


図３　円の接線



〈図を描くときの注意〉

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。