



コンパスと定規で描ける図形の世界

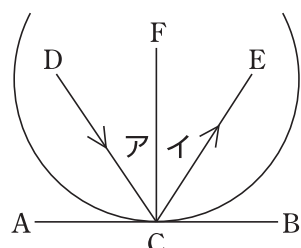
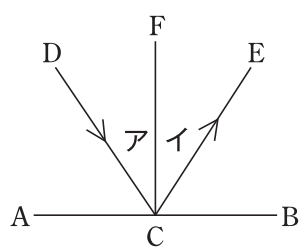
……ユークリッド幾何の世界……

第71回 円の内部で反射する光の軌跡を作図しよう3

今回は、円に対して反射する光の軌跡を作図します。

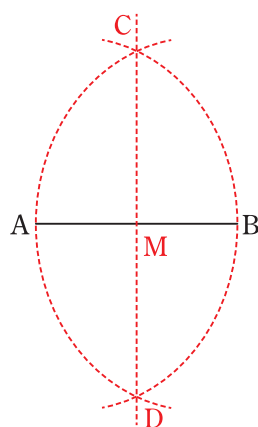
円に対する光の反射について

光の反射について確認しておきます。右の図の直線AB上の点Cで、点DからCに進んできた光が反射しEの方向へ進んだとします。このとき、ABと垂直な線CFに対し、光の進む方向DCとCFのなす角アと光の進む方向CEとCFのなす角イが等しくなります。この角アを入射角といい、角イを反射角といいます。次に、右の図のように、点Dから円上の点Cへ進んできた光が、点Cで円に対して反射するならば、点Cでの円の接線ABに対して、入射角と反射角が等しくなるように反射することになります。



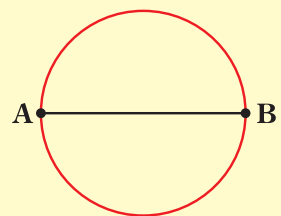
中点の作図法の確認

線分の中点の描き方をおさらいしておきます。線分ABにおいて、点Aを中心とし半径ABの円と点Bを中心とし半径ABの円を描き、その2円の交点をC、Dとします。このとき、2点C、Dを通る直線を描けば、ABとCDの交点Mが線分ABの中点になっています。証明を知りたい人は、第5回の記事(2016年5月19日付)を見てください。それでは、チャレンジ問題の準備として、与えられた線分を直径とする円の作図について確認しておきましょう。



問題 1

線分ABを直径とする円をコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。

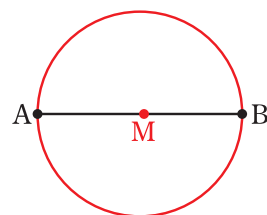


考え方

円を作図するには中心と半径を決めればよいので……。

描き方

本文の記事のように線分ABの中点Mを作図し、Mを中心とし半径AMの円Mを描くと、この円Mが求める円になっています。

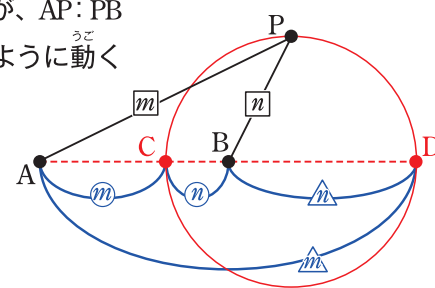
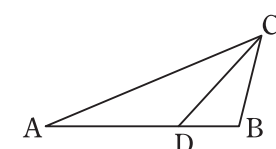


証明

円Mは、線分ABの中点を中心とし、両端点A、Bを通る円なので、線分ABが円Mの直径とわかります。したがって、図の描き方が正しいことがわかりました。

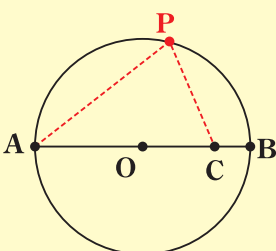
円周上で反射する光の軌跡を作図しよう

第68回の記事で、「△ABCの辺AB上に点DをAC:CB=AD:DBになるようにとるとき、CDはCAとCBのなす角の二等分線になる」(角の二等分線と比の性質の逆)ことや、「2定点A、Bが与えられているとき、点Pが、AP:PB(AP>PB)が一定の比m:nになるように動くと、点Pの軌跡が線分ABをm:nに内分する点Cと線分ABをm:nに外分する点Dを直径の両端とする円周(アポロニウスの円といいます)になる」ことを扱いました。これらのことも利用して、チャレンジ問題に取り組んでみましょう。がんばって考えてみてくださいね。



チャレンジ問題

中心O、直径ABの円Oが与えられているとき、線分BO上に点CをAO:OC=3:2となるようにとります。Aを出発点として円内を進んでいく光が、円周上の点Pで1回反射して点Cにぶつかるような点Pをコンパスと定規を用いて1つ描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

問題 1 をヒントに考えてみましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

(根本原理)

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい(図1)。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい(図2)。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である(図3)。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

図1 対頂角



図2 錯角

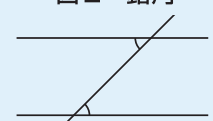
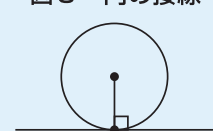


図3 円の接線



(図を描くときの注意)

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。