数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

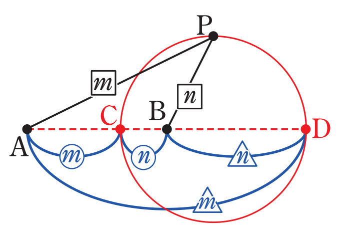
コンパスと定規で描ける図形の世界
……ユークリッド幾何の世界……

第70回 見上げる高さが同じになる位置の点を作図しよう２

今回は、アポロニウスが考えた「ある条件をみたす点の軌跡が円になる」ことを利用するチャレンジ問題を考えていきます。

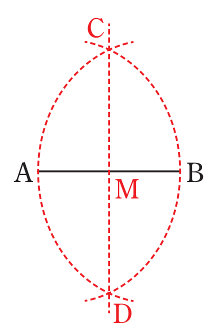
アポロニウスの円

前々回の記事では、「2定点A、Bが与えられているとき、点Pが、AP：PBが一定の比m：n（m＞n）になるように動くと、点Pの軌跡が線分ABをm：nに内分する点Cと線分ABをm：nに外分する点Dを直径の両端とする円周（アポロニウスの円といいます）になる」ことを証明しました。証明が気になる人は第68回の記事（2021年8月19日付）を見てください。

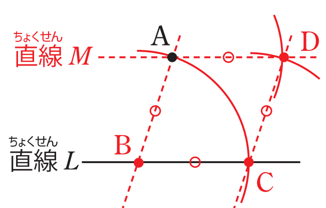


いくつかの作図法の確認

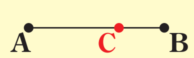
まずは、線分の中点の描き方をおさらいしておきます。線分ABにおいて、点Aを中心とし半径ABの円と点Bを中心とし半径ABの円を描き、その2円の交点をC、Dとします。このとき、2点C、Dを通る直線を描けば、ABとCDの交点Mが線分ABの中点になっています。証明を知りたい人は、第5回の記事（2016年5月19日付）を見てください。



次に、平行線の描き方を確認しておきましょう。直線L上にない点Aが与えられているとき、点Aを通り直線Lと平行な直線Mをコンパスと定規を用いて描く方法のひとつは、右の図のようにひし形ABCDを描くことでした。証明が知りたい人は、第34回の記事（2018年10月18日付）を見てください。それでは、チャレンジ問題の準備として、内分点の作図について確認しておきましょう。

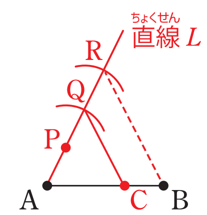


問題 1
線分ABを2：1に内分する点Cをコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。

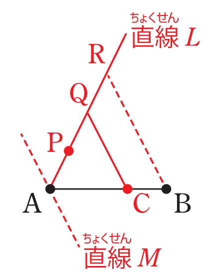


考え方 いろいろな描き方がありますが、平行線を利用することを考えてみましょう。

描き方 Aを通り、Bを通らない直線Lを描き、その直線上にAではない点Pをとります。Pを中心としAPを半径とする円Pを描き、直線Lと円Pの2つの交点のうちAでない方をQとします。Qを中心としAPを半径とする円Qを描き、直線Lと円Qの2つの交点のうちPでない方をRとします。本文で確認したように、点Qを通りBRと平行な直線を描き、ABとの交点をCとすると、このCが求める点になっています。

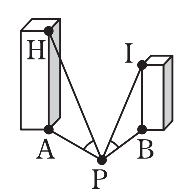


証明 図の描き方から、AP＝PQ＝QR…①、CQ//BR…②です。点Aを通り、CQと平行な直線をMとします。②を考えて、直線M//CQ//BR…③です。「3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい」ことから、③より、AC：CB＝AQ：QR…④です。①より、AQ：QR＝2AP：AP＝2：1…⑤なので、④⑤より、AC：CB＝2：1とわかります。したがって、描き方が正しいことが証明できました。

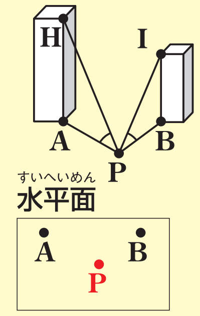


見上げる高さが同じ点の軌跡とアポロニウスの円

前回の記事でも触れましたが、地上から別の建物の一番上を見上げるとき同じ高さに見えるのは、見上げる角度（仰角といいます）が同じときになります。右の図は、3点P、A、Bが地上の水平面上にあり、Pから別の建物の点H、Iを見上げている状態です。この図の場合だと、PAとPHのなす角とPBとPIのなす角が同じとき、点HとIの高さが同じに見えるということです。それでは今回のチャレンジ問題です。がんばって考えてみてくださいね。



チャレンジ問題
点A、Bが水平面上にあり、AH＝2BIである2つの直方体の建物が与えられています。点Pが、Pから点H、Iを見上げる角度が同じになるように水平面上を動くとき、点Pの軌跡をコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方 △PAHと△PBIの関係を考え、アポロニウスの円を考えてみましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

〈根本原理〉
- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図1）。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である（図3）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

図1 対頂角

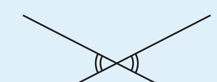


図2 錯角

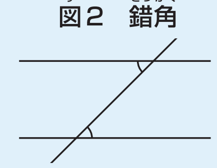
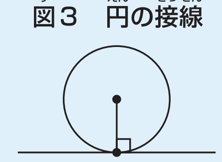


図3 円の接線



〈図を描くときの注意〉
- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。