

数学の世界をのぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

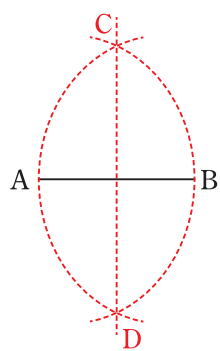
第69回

見上げる高さが同じになる位置の点を作図しよう

今回は、建物を見上げたときに同じ高さに見える位置について考えていきます。

垂直二等分線の描き方

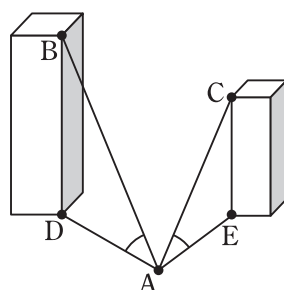
まず、線分の垂直二等分線の描き方をおさらいしておきます。線分ABにおいて、点Aを中心とし半径ABの円と点Bを中心とし半径ABの円を描き、その2円の交点をC、Dとします。このとき、2点C、Dを通る直線を描けば、CDが線分ABの垂直二等分線になっています。証明を知りたい人は、第4回の記事(2016年4月21日付)を見てください。



見上げる角度が一定を保って動く点の軌跡

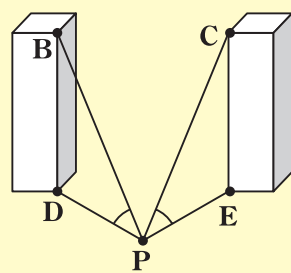
地上から別の建物の一番上を見上げるとき、同じ高さに見えるのは、見上げる角度(仰角)が同じときになります。

右の図は、3点A、D、Eが地上の水平面上にあり、Aから別の建物の点B、Cを見上げている状態です。この図の場合だと、ABとADのなす角とACとAEのなす角が同じとき、点BとCの高さが同じに見えるということです。



問題1

点D、Eが水平面上にあり、高さBD、CEが等しい2つの建物が与えられています。点Pが、Pから点B、Cを見上げる角度が同じになるように水平面上をうごくと、点Pの軌跡が水平面上で線分DEの垂直二等分線になることを証明してみましょう。

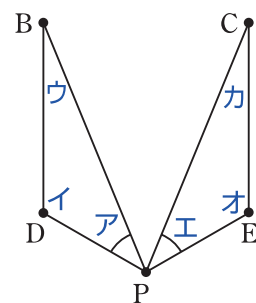


考え方

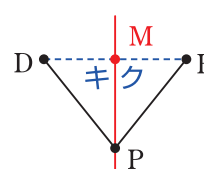
△PBDと△PCEの関係を考えてみましょう。

証明

図のように、角をAからIまでおきます。問題の仮定より、BD = CE…①、角A = 角I…②、角D = 角E = 90度…③です。△PBDと△PCEにおいて、「三角形の内角の和は180度である」ことから、角ウ = 180度 - 角ア - 角イ…④、角カ = 180度 - 角エ - 角オ…⑤です。よって、②③④⑤より、角ウ = 角カ…⑥です。



「一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、①③⑥より、△PBDと△PCEはぴったり重なります。よって、PD = PE…⑦です。



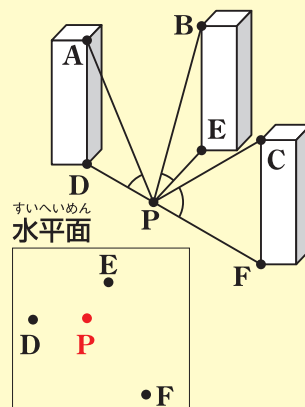
ここから3点P、D、Eがある水平面上で考えます。DEの中点をMとし、図のように角キ、クをおきます。DM = EM…⑧です。Pが線分DE上にないとき、△PDMと△PEMにおいて、「三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、⑦⑧とPMは共通より、△PDMと△PEMはぴったり重なります。よって、角キ = 角クなので、PMとDEは垂直であり、⑧を考えると、PMは線分DEの垂直二等分線…⑨です。Pが線分DE上にあるときは、⑧より、DE上でPとMは一致…⑩します。⑨⑩から、点Pの軌跡は、線分DEの垂直二等分線になるとわかりました。

見上げる高さが同じになる位置の点の作図

それでは今回のチャレンジ問題です。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

一直線上にない3点D、E、Fが水平面上にあり、高さAD、BE、CFが等しい3つの建物が与えられています。水平面上で点A、B、Cを見上げる角度が同じになる位置にある点Pをコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

△PAD、△PBE、△PCFの関係を考えてみましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

(根本原理)

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい(図1)。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい(図2)。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である。(図3)。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

図1 対頂角

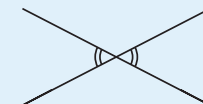


図2 錯角

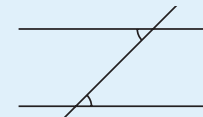
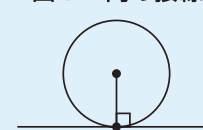


図3 円の接線



(図を描くときの注意)

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。