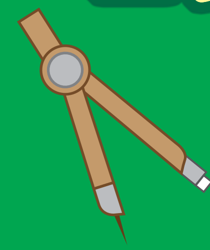
数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界



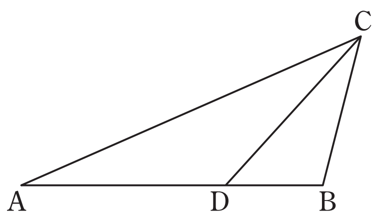
……ユークリッド幾何の世界……

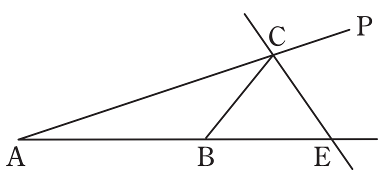
第68回 アポロニウスの円

今回は、アポロニウスが考えた「ある条件をみたす点の軌跡が円になる」ことの証明について考えていきます。

角の二等分線と線分の比

第59回の記事（2020年11月19日付）では、「△ABCのCAとCBのなす角の二等分線と辺ABとの交点をDとするとき、AC：CB＝AD：DBになる」ことを、第58回の記事（2020年10月15日付）では、「△ABCの辺ACのCの方への延長線上に点Pをとり、CBとCPのなす角の二等分線と辺ABのBの方への延長線との交点をEとするとき、AC：CB＝AE：EBになる」ことを証明しました。





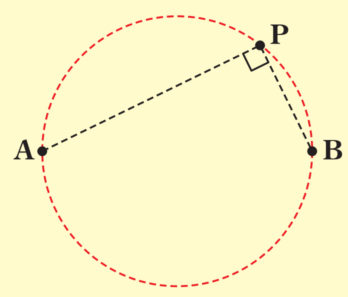
角の二等分線が1本しかないことを考えると、これらの性質の逆である、「△ABCの辺AB上に点DをAC：CB＝AD：DBになるようにとるとき、CDはCAとCBのなす角の二等分線になる」や「△ABCの辺ACのCの方への延長線上に点Pをとり、辺ABのBの方への延長線上に点EをAC：CB＝AE：EBになるようにとるとき、CEはCBとCPのなす角の二等分線になる」ことが成り立ちます。気になる人は証明を考えてみるとよいでしょう。

一定の角度を保って動く点の軌跡

次に、チャレンジ問題のヒントになる問題を考えておきましょう。

問題1

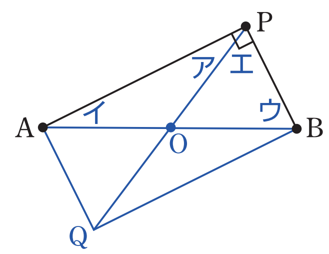
2定点A,Bが与えられているとき、点PがPAとPBのなす角が90度を保って動くと、点Pの軌跡がABを直径とする円になる（ただし、点A、Bを除く）ことを証明してみましょう。



考え方

円は中心と呼ばれる点からの距離が一定の点をすべて集めてできる図形のことです。

証明



まず、問題の仮定より、PAとPBのなす角は90度です。そこで、4点A,P,B,Qがこの順に長方形、すなわち、4つの内角がすべて90度になるように点Qをとり、ABとPQの交点をOとします。

四角形APBQは長方形…①なので、平行四辺形でもあります。よって、「平行四辺形の向かい合う辺は等しい」ことから、AQ＝PB…②、AP＝QB…③です。

ここで、図のように、角をアからエまでおきます。△APQと△PABにおいて、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、①よりAQとAPのなす角＝PBとPAのなす角、②、APは共通より、△APQと△PABはぴったり重なります。よって、角ア＝角イ…④です。

△APBと△QBPにおいて、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、①よりPAとPBのなす角＝BQとBPのなす角、③、PBは共通より、△APBと△QBPはぴったり重なります。よって、角ウ＝角エ…⑤です。

「二角が等しければ二等辺三角形である」ことから、④よりOA＝OP…⑥、⑤よりOP＝OB…⑦です。

⑥⑦より、3点A、B、Pは線分ABの中点Oから等距離にあるので、点Pは、ABを直径とする円上にあります。

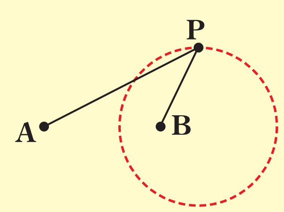
したがって、点PがPAとPBのなす角が90度を保って動くと、直径ABの円上を両端点A、Bを除いて動くとわかったので、点Pの軌跡がABを直径とする円になることが証明できました。

アポロニウスの円

それでは今回のチャレンジ問題です。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

2定点A,Bが与えられています。点Pが、AP：PBが一定の比m：n（m＞n）になるように動くと、点Pの軌跡がある円周になることを証明してみましょう。



考え方

問題1と角の二等分線と線分の比の関係をヒントに考えてみましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

〈根本原理〉

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図1）。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である。（図3）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

図1 対頂角

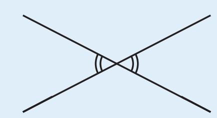


図2 錯角

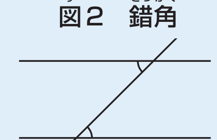
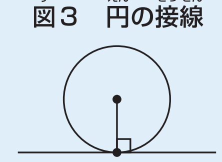


図3 円の接線



〈図を描くときの注意〉

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。