



数学の世界をのぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

第67回

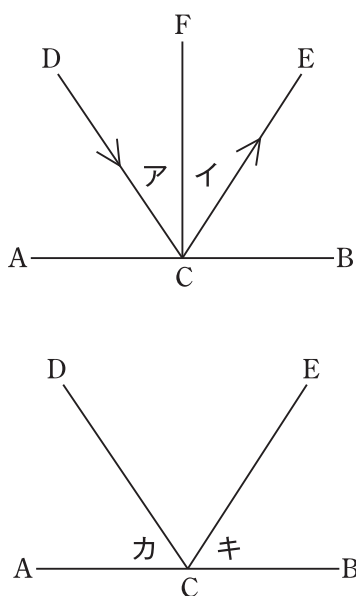
三角形の内部で反射する光の軌跡を作図しよう

今回は、反射する光の軌跡を作図します。

光の反射について

光の反射について確認しておきます。

右の図の直線AB上の点Cで、点DからCに進んできた光が反射しEの方向へ進んだとします。このとき、ABと垂直な線CFに対し、光の進む方向DCとCFのなす角アと光の進む方向CEとCFのなす角イが等しくなります。この角アを入射角といい、角イを反射角といいます。



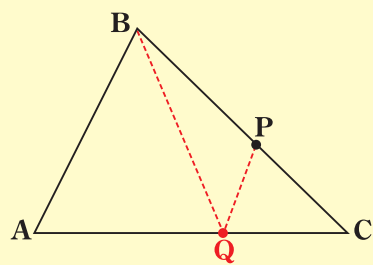
このことから、右の図において、角カ=角キのとき、点DからCに進んできた光が直線ABで反射すると点Eの方向へ進むことが証明できます。証明を知りたい人は、第66回の記事（2021年6月17日付）をご覧ください。

三角形の内部で反射する光の軌跡の作図1

次に、チャレンジ問題のヒントになる問題を考えておきましょう。

問題1

ACとBCのなす角が60度未満で、残る2つの内角も90度未満の△ABCと辺BC上の点Pが与えられています。点Pを出発点として進んでいく光が辺AC上の点Qで1回反射して点Bにぶつかるような光の軌跡を作図したいとします。点Qをコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。

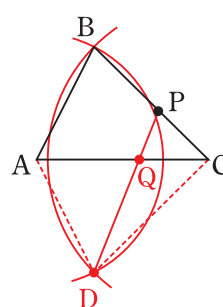


考え方

ACとBQ、ACとPQのなす角が等しくなるように作図します。

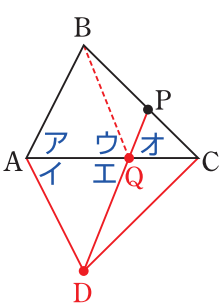
描き方

点Aを中心とし半径ABの円AとCを中心とし半径BCの円Cを描き、円Aと円Cの交点のうちBではない方をDとします。2点D、Pを通る直線を描き、その直線とACとの交点をQとすると、この点Qが求める点になっています。



証明

図のように角をAからオまでおきます。図の描き方から、AB=AD…①、CB=CD…②です。「三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、①②とACは共通より、△ABCと△ADCはぴったり重なります。よって、角ア=角イ…③です。「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、



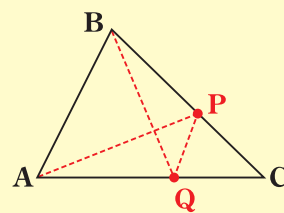
①③とAQは共通より、△ABQと△ADQはぴったり重なります。よって、角ウ=角エ…④です。「対頂角は等しい」ことから、角エ=角オ…⑤です。④⑤より、角ウ=角オ…⑥です。⑥より、点Pから点Qに進む光がAC上の点Qで反射して、点Qから点Bに進んでいくとわかります。したがって、図の描き方が正しいことがわかりました。

三角形の内部で反射する光の軌跡の作図2

それでは今回のチャレンジ問題です。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

ACとBCのなす角が60度未満で、残る2つの内角も90度未満の△ABCが与えられています。点Aを出発点として進んでいく光が辺BC上の点Pで1回反射し、辺AC上の点Qでもう1回反射して点Bにぶつかるような光の軌跡を作図したいとします。点P、Qをコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

問題1をヒントに考えてみましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときには根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

(根本原理)

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい (図1)。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい (図2)。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である。(図3)。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

図1 対頂角

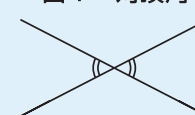
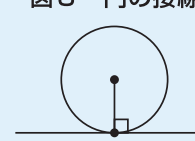


図2 錯角



図3 円の接線



(図を描くときの注意)

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。