



コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

折れ線の長さが最小になるよう作図しよう

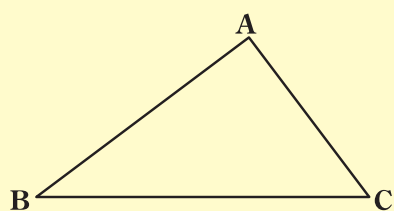
今回は、折れ線の長さが最も小さくなるような作図が目標です。

三角形の内角の大きさと向かい合う辺の長さの関係

まずは、三角形の2つの内角と向かい合う2つの辺に対して、大きい方の内角に向かい合う辺の方が長いことを証明しておきましょう。

問題 1

△ABCにおいて、BAとBCのなす角がCAとCBのなす角よりも小さいとき、ABの長さがACの長さよりも長いことを証明してみましょう。

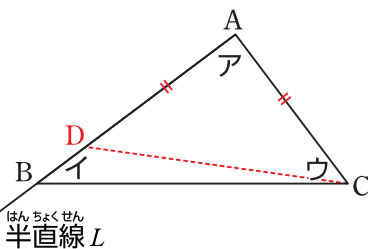


考え方

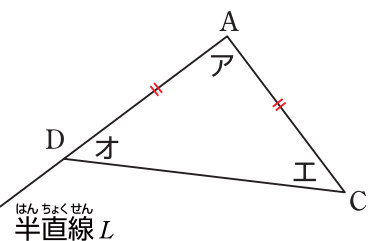
二等辺三角形を利用してみましょう。

証明

線分ABをBの方へ延長した半直線L上に、点DをAD=AC…①となるようにとります。図のように、角をアからオまでおくと、仮定より、角イ<角ウ…②です。



△ACDにおいて、「二等辺三角形の底角は等しい」ことから、①より、角エ=角オ…③です。「三角形の内角の和は180度」から、△ABCにおいて、角イ+角ウ=180度-角ア…④、△ACDにおいて、角エ+角オ=180度-角ア…⑤です。



③⑤より、角エ=角オ=(180度-角ア)÷2…⑥、④⑥より、角イ=角オ=(角イ+角ウ)÷2…⑦です。②より、(角イ+角ウ)÷2<(角ウ+角ウ)÷2=角ウ…⑧なので、⑦⑧より、角ウ>角イ…⑨です。

⑨より、CDは△ABCの内部にあり、点Dは線分AB上で点A、B以外の点であるとわかるので、AB>AD…⑩です。

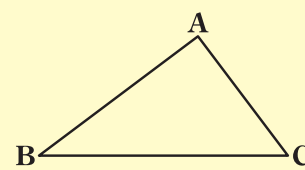
したがって、①⑩より、AB>ACであることが証明できました。

三角形の2辺の長さの和は、残りの辺の長さより長い

次に、チャレンジ問題を解決するためのヒントになる問題を考えておきます。

問題 2

△ABCにおいて、BC<AB+ACであることを証明してみましょう。

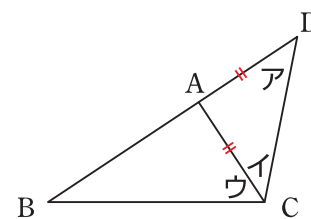


考え方

問題 1 をどう利用するかを考えてみましょう。

証明

点Dを、線分ABのAの方への延長線上に、AD=AC…①となるようにとり、図のように、角をアからウまでおきます。△ACDにおいて、「二等辺三角形の底角は等しい」ことから、①より、角ア=角イです。



よって、角ア<角イ+角ウなので、問題 1 より、BC<BD=AB+AD…②です。

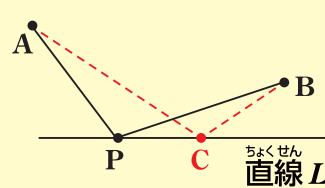
したがって、①②より、BC<AB+ACとわかりました。

折れ線の長さが最も小さくなるように作図しよう

それでは今回のチャレンジ問題です。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

直線Lに対し同じ側で直線上にない2点A、Bが与えられているとき、直線L上の点Pで、AP+PBが最小になる点Pを点Cとします。点Cをコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

問題 2 をヒントに考えてみましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときには根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

(根本原理)

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい(図1)。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい(図2)。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である(図3)。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

図1 対頂角

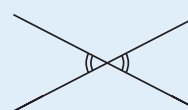
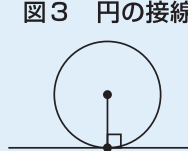


図2 錯角



図3 円の接線



(図を描くときの注意)

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。