企画・構成｜科学的教育グループ SEG®

バックナンバーは右記アドレスにて公開中！＞ https://www.seg.co.jp/

数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

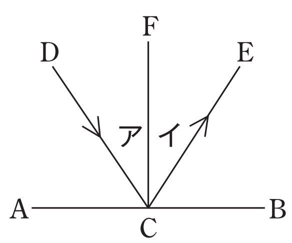
……ユークリッド幾何の世界……

第64回 円の内部で反射する光の軌跡を作図しよう 2

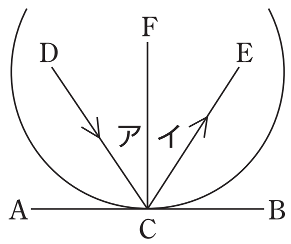
今回は、反射する光の軌跡の作図の続きです。

光の反射について

光の反射について確認しておきます。右の図の直線AB上の点Cで、点DからCに進んできた光が反射しEの方向へ進んだとします。このとき、ABと垂直な線CFに対し、光の進む方向DCとCFのなす角アと光の進む方向CEとCFのなす角イが等しくなります。この角アを入射角といい、角イを反射角といいます。

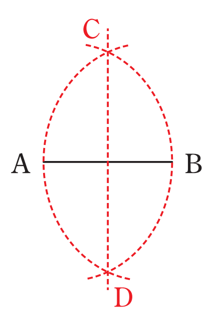


次に、右の図のように、点Dから円上の点Cへ進んできた光が、点Cで円に対して反射するならば、点Cでの円の接線ABに対して、入射角と反射角が等しくなるように反射することになります。



垂直二等分線の描き方

線分の垂直二等分線の描き方をおさらいしておきます。線分ABにおいて、点Aを中心とし半径ABの円と点Bを中心とし半径ABの円を描き、その2円の交点をC、Dとします。このとき、2点C、Dを通る直線を描けば、CDが線分ABの垂直二等分線になっています。証明を知りたい人は、第4回の記事（2016年4月21日付）を見てください。

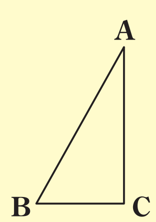


ある特別な三角形の半分の形

まずは、チャレンジ問題を解決するためのヒントになる問題を考えてみましょう。

問題1

△ABCにおいて、AB＝2BC、CAとCBのなす角が90度のとき、BAとBCのなす角が60度、ABとACのなす角が30度であることを証明してみましょう。

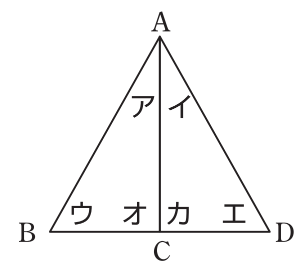


考え方

△ABCは、ある特別な三角形のちょうど半分の形になります。

証明

仮定より、AB＝2BC…①です。BCのCのほうへの延長線上に、点Dを、DC＝BC…②となるようにとります。図のように、角をアからカまでおきます。仮定より、角オ＝90度…③です。△ABCと△ADCにおいて、「3点B、C、Dがこの順番で一直線上にあるならば、CBとCDのなす角は180度である」ことから、角カ＝180度－角オ…④です。③④より、角カ＝180度－90度＝90度＝角オ…⑤です。「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、②⑤とACは共通より、△ABCと△ADCはぴったり重なります。よって、AB＝AD…⑥、角ア＝角イ…⑦、角ウ＝角エ…⑧です。



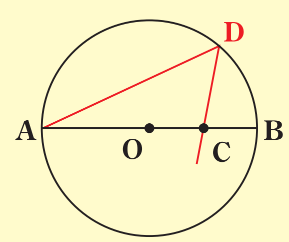
①②より、AB＝2BC＝BC＋DC＝BDなので、「二等辺三角形の底角は等しい」ことから、角ア＋角イ＝角エ…⑨です。「三角形の内角の和は180度である」ことから、(角ア＋角イ)＋角ウ＋角エ＝180度…⑩です。⑧⑨⑩より、角ア＋角イ＝角ウ＝角エ＝180度÷3＝60度…⑪です。⑦⑪より、角ア＝角イ＝60度÷2＝30度…⑫です。⑪⑫より、BAとBCのなす角が60度、ABとACのなす角が30度であることが証明できました。

円周上で反射する光の軌跡を作図しよう

それでは、今回のチャレンジ問題です。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

中心O、直径ABの円Oが与えられています。線分BOの中点をCとするとき、Aを出発点として円内を進んでいく光が円周上の点Dで1回反射して点Cにぶつかるような光の軌跡を作図したいとします。点Dを1つコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

問題1 をヒントに考えてみましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

〈根本原理〉

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図1）。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である（図3）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

図1　対頂角

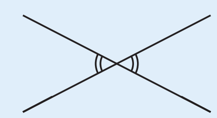


図2　錯角

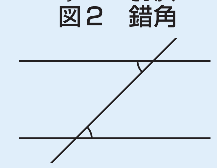
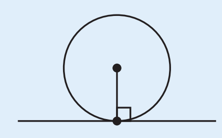


図3　円の接線



〈図を描くときの注意〉

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。