



数学の世界をのぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

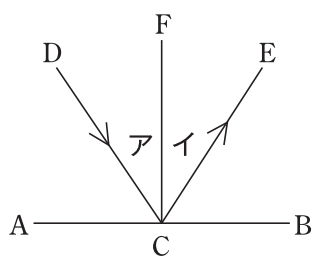
……ユークリッド幾何の世界……

円の内部で反射する光の軌跡を作図しよう

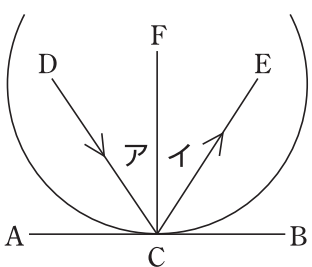
今回は、反射する光の軌跡を作図します。

光の反射について

平面上を進む光が、ある直線で反射する状況を考えます。右の図の直線AB上の点Cで、点DからCに進んできた光が反射しEの方向へ進んだとします。このとき、ABと垂直な線CFに対し、光の進む方向DCとCFのなす角アと光の進む方向CEとCFのなす角イが等しくなります。この角アを入射角といい、角イを反射角といいます。



次に、平面上を進む光が、ある円上の点で反射する状況を考えます。右の図のように、点Dから円上の点Cへ進んできた光が、点Cで円に対して反射するならば、点Cでの円の接線ABに対して、入射角と反射角が等しくなるように反射することになります。

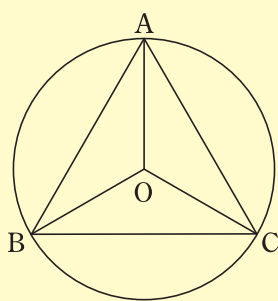


円周上に3頂点のある三角形

まずは、チャレンジ問題を解決するためのヒントになる問題を考えてみましょう。

問題 1

中心Oの円が与えられており、その周上に3点A、B、Cがある。OAがABとACのなす角を二等分し、OBがBAとBCのなす角を二等分するとき、△ABCは正三角形であることを証明してみましょう。

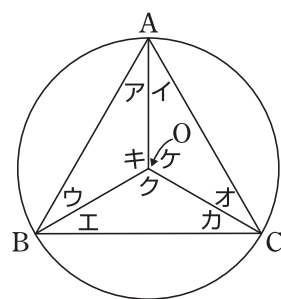


考え方

正三角形とは、3つの辺の長さがすべて等しい三角形のことです。

証明

図のように、角アからケまでおきます。仮定より、角ア=角イ…①、角ウ=角エ…②です。円の半径なので、OA=OB=OC…③です。「二等辺三角形の底角は等しい」ことから、③より△OABはOA=OBの二等辺三角形なので、角ア=角ウ…④です。



同様に考えて、③より△OBCと△OCAも二等辺三角形であることから、角エ=角カ…⑤、角イ=角オ…⑥です。したがって、①②④⑤⑥より、角アから角カは等しい…⑦です。

「三角形の内角の和は180度」から、角キ=180度-角ア-角ウ…⑧、角ク=180度-角エ-角カ…⑨、角ケ=180度-角イ-角オ…⑩なので、⑦⑧⑨⑩より、角キ=角ク=角ケ…⑪です。

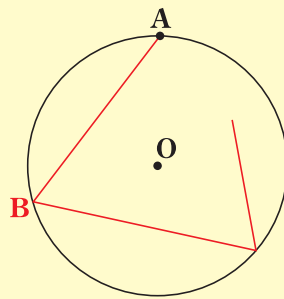
「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、③⑪より、△OAB、△OBC、△OCAはぴったり重なります。よって、対応する辺AB、辺BC、辺CAもぴったり重なるので、AB=BC=CAです。したがって、△ABCは正三角形であることが証明できました。

円周上で反射する光の軌跡を作図しよう

それでは、今回のチャレンジ問題です。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

中心Oの円Oと円周上の点Aが与えられているとき、Aを出発点として円内を進んでいく光が円周で2回反射してまた点Aに戻ってくるような光の軌跡を作図したい。1回目に反射する点Bを1つコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

問題 1 をヒントに考えてみましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

(根本原理)

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい(図1)。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい(図2)。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結び半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結び半径と垂直である。(図3)。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

図1 対頂角

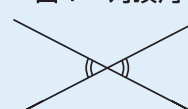
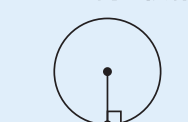


図2 錯角



図3 円の接線



(図を描くときの注意)

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。