



コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

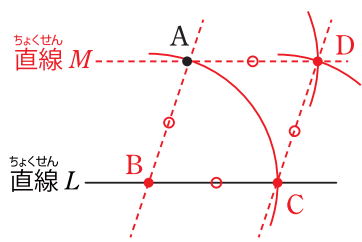
第62回

週の長さや面積が与えられた長方形の作図

今回は、週の長さや面積が与えられた長方形を作図します。

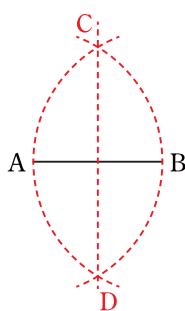
いくつかの作図法の確認

まずは、平行線の引き方を確認しておきましょう。直線LとL上にある点Aが与えられているとき、点Aを通り直線Lと平行な直線Mをコンパスと定規を用いて描く方法の一つは、右の図のようにひし形ABCDを描く

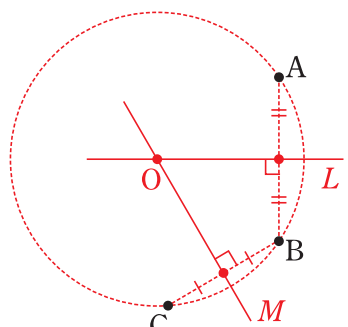


ことでした。証明を知りたい人は、第34回の記事（2018年10月18日付）をご覧ください。

次に、線分の垂直二等分線の引き方をおさらいしておきます。線分ABにおいて、点Aを中心とし半径ABの円と点Bを中心とし半径ABの円を描き、その2円の交点をC、Dとします。このとき、2点C、Dを通る直線を描けば、CDが線分ABの垂直二等分線になっています。証明を知りたい人は、第4回の記事（2016年4月21日付）をご覧ください。



最後に、一直線上にない3点A、B、Cが与えられているとき、これらの3点A、B、Cを通る円をコンパスと定規を用いて描く方法は、例えば以下ようになります。右の図のように、線分ABの垂直二等分線Lと線分BCの垂直二等分線Mを、上で解説したように描きます。すると、LとMの交点Oが3点A、B、Cを通る円の中心になるので、Oを中心とし半径OAの円を描けばよいことになります。証明を知りたい人は第45回の記事（2019年9月19日付）をご覧ください。

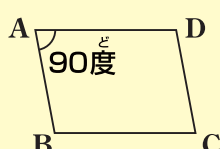


長方形になるための条件は？

それでは、チャレンジ問題の解決に必要な次の問題を考えてみましょう。

問題 1

平行四辺形ABCDにおいて、BAとDAのなす角が90度のとき、ABCDは長方形であることを証明してみましょう。

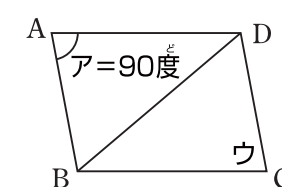
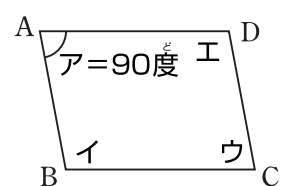


考え方

長方形とは、4つの内角がすべて等しく90度ずつである四角形のことです。

証明

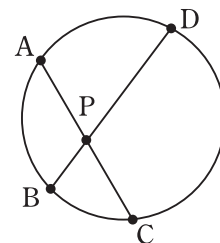
図のように、角をア、イ、ウ、エとおきます。△ABDと△CDBにおいて、「平行四辺形の向かい合う辺は等しい」ことから、 $AB = CD$ …①、 $AD = CB$ …②です。また、 $BD = DB$ （共通）…③です。「三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、①②③より、△ABDと△CDBはぴったり重なります。よって、 $\angle U = \angle A = 90^\circ$ …④です。



同様に考えて、△ABCと△CDAもぴったり重なるので、 $\angle I = \angle E$ …⑤です。「四角形の内角の和は360度」から、 $\angle A + \angle I + \angle U + \angle E = 360^\circ$ …⑥なので、④⑤⑥より、 $90^\circ + \angle I + 90^\circ + \angle I = 360^\circ$ です。よって、 $\angle I = \angle E = 90^\circ$ …⑦です。したがって、④⑦より、ABCDは長方形であることが証明できました。

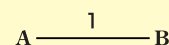
週の長さや面積が与えられた長方形の作図

前回の記事で、「円周上に4点A、B、C、Dを、ACとBDが円内で交点を持つようにとる。交点をPとすると、 $AP \times CP = BP \times DP$ である」ということを証明しました。このことを利用して、以下のチャレンジ問題に取り組んでみましょう。がんばって考えてみてくださいね。



チャレンジ問題

長さが1の線分が与えられているとき、週の長さが8、面積が1の長方形を、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

長方形の面積が、たて×よこであることと、前回の記事で扱った性質をどう結び付けるとよいかを考えてみましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

根本原理

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図1）。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である。（図3）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

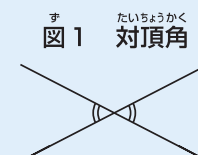


図1 対頂角

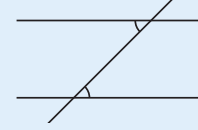


図2 錯角

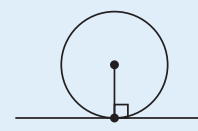


図3 円の接線

図を描くときの注意

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。