数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

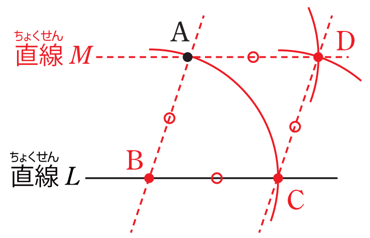
……ユークリッド幾何の世界……

第61回 与えられた条件を満たす点の作図

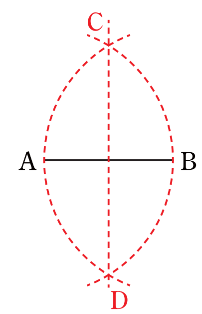
今回は、与えられた条件を満たす点を作図します。

いくつかの作図法の確認

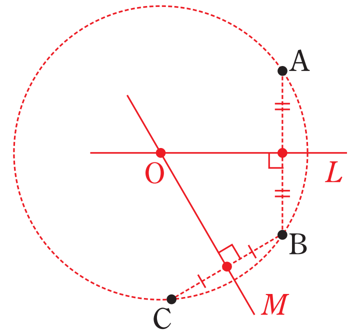
まずは、平行線の描き方を確認しておきましょう。直線LとL上にない点Aが与えられているとき、点Aを通り直線Lと平行な直線Mをコンパスと定規を用いて描く方法の一つは、右の図のようにひし形ABCDを描くことでした。証明を知りたい人は、第34回の記事（2018年10月18日付）を見てください。



次に、線分の垂直二等分線の描き方をおさらいしておきます。線分ABにおいて、点Aを中心とし半径ABの円と点Bを中心とし半径ABの円を描き、その2円の交点をC、Dとします。このとき、2点C、Dを通る直線を描けば、CDが線分ABの垂直二等分線になっています。証明を知りたい人は、第4回の記事（2016年4月21日付）を見てください。



最後に、一直線上にない3点A、B、Cが与えられているとき、これらの3点A、B、Cを通る円をコンパスと定規を用いて描く方法は、例えば以下のようになります。右の図のように、線分ABの垂直二等分線Lと線分BCの垂直二等分線Mを、上で解説したように描きます。すると、LとMの交点Oが3点A、B、Cを通る円の中心になるので、Oを中心とし半径OAの円を描けばよいことになります。証明を知りたい人は第45回の記事（2019年9月19日付）を見てください。

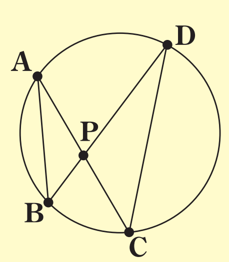


長さの掛け算の式は、比の式から導かれる

それでは、チャレンジ問題の解決に必要になる次の問題を考えてみましょう。

問題1

円周上に4点A、B、C、Dを、ACとBDが円内で交点を持つようにとる。交点をPとするとき、$AP \times CP = BP \times DP$であることを証明してみましょう。



考え方

$AP \times CP = BP \times DP$は、$AP : BP = DP : CP$から導かれます。

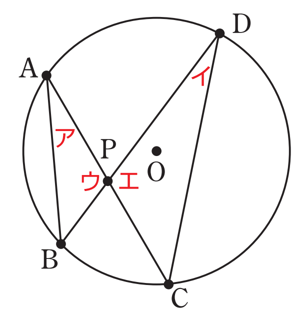
証明

図のように、角をア、イ、ウ、エとおき、円の中心をOとします。

すると、「ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である」ことから、角ア＝角イ…①です（中心角はOBとOCのなす角です）。

また、「対頂角は等しい」ことから、角ウ＝角エ…②です。

「二角が等しい三角形は相似である」ことから、①②より、△APBと△DPCは相似です。



よって、$AP:BP=DP:CP$、すなわち、$\frac{BP}{AP}=\frac{CP}{DP}$なので、通分して、$\frac{BP \times DP}{AP \times DP}=\frac{AP \times CP}{AP \times DP}$です。

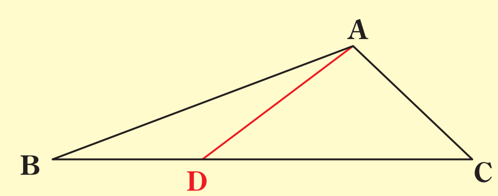
したがって、$AP \times CP = BP \times DP$であることが証明できました。

与えられた条件を満たす点の作図

それでは、今回のチャレンジ問題です。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

ABとACのなす角が90度よりも大きい△ABCが与えられています。このとき、辺BC上に、$AD \times AD = BD \times CD$となるような点Dをコンパスと定規を用いて1つ描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

問題1の性質をどう使うかを考えてみましょう

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

〈根本原理〉

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図1）。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である。（図3）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

図1 対頂角

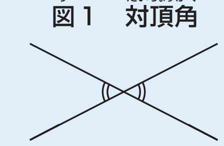


図2 錯角

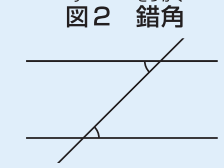
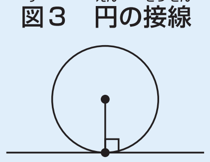


図3 円の接線



〈図を描くときの注意〉

・定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。