

数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

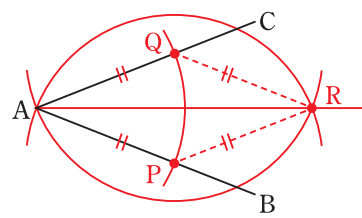
第60回

与えられた条件を満たす三角形の作図

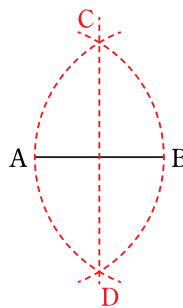
今回は、与えられた条件を満たす三角形を作図します。

いくつかの作図法の確認

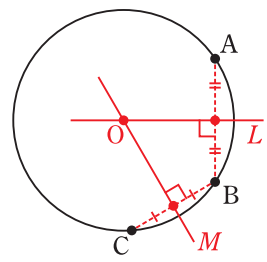
まずは、コンパスと定規を用いた角を二等分する直線の描き方をおさらいしておきます。線分AB上に点Pをとり、コンパスでAを中心とする半径APの円を描き、その円と線分AC、または、ACのCの方への延長線との交点をQとします。そして、コンパスで、Pを中心とする半径PAの円とQを中心とする半径QAの円を描き、それら2円の2交点のうちAではない点をRとします。すると、直線ARが、ABとACの間の角の二等分線になります。証明は、第2回の記事（2016年2月18日付）にあります。



次に、線分の垂直二等分線の描き方をおさらいしておきます。線分ABにおいて、点Aを中心とし半径ABの円と点Bを中心とし半径ABの円を描き、その2円の交点をC、Dとします。このとき、2点C、Dを通る直線を描けば、CDが線分ABの垂直二等分線になっています。

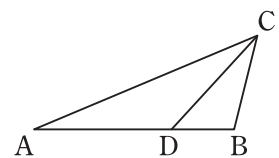


最後に、一直線上にない3点A、B、Cが与えられているとき、これらの3点A、B、Cを通る円をコンパスと定規を用いて描く方法は例えば以下ようになります。右の図のように、線分ABの垂直二等分線Lと線分BCの垂直二等分線Mを、上で解説したように描きます。すると、LとMの交点Oが3点A、B、Cを通る円の中心になるので、Oを中心とし半径OAの円を描けばよいことになります。証明を知りたい人は第45回の記事（2019年9月19日付）を見てください。



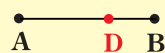
角の二等分線と線分の比の関係の応用

第59回の記事であつかった、「△ABCのCAとCBのなす角の二等分線と辺ABとの交点をDとすると、AC : CB = AD : DBになる」ことを利用して、次の問題を考えてみましょう。



問題1

線分AB上に点Dを、AD : DB = 2 : 1 になるようにコンパスと定規を用いて描き、その描き方ですぐに図が描けていることを証明してみましょう。

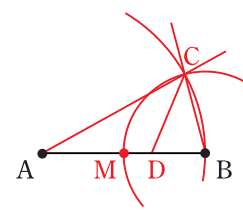


考え方

いろいろな方針がありますが、ここでは、角の二等分線と線分の比の関係を利用できるように補助線を描いてみましょう。

描き方

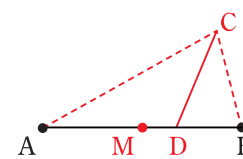
線分ABの中点Mを本文の記事のように描きます。点Aを中心とする半径ABの円と点Bを中心とし半径BM (= AM) の円を描き、2円の交点の1つをCとします。



CAとCBのなす角の二等分線を本文の記事のように描き、その直線と直線ABの交点をDとすると、この点Dが求める点になっています。

証明

図の描き方から、AC = 2AM…①、BC = AM…②、CDはCAとCBのなす角の二等分線…③です。③より、「角の二等分線と線分の比の関係」から、AD : DB = CA : CB…④です。①②④より、AD : DB = 2AM : AM = 2 : 1 でした。したがって、図が正しく描けていることが証明できました。

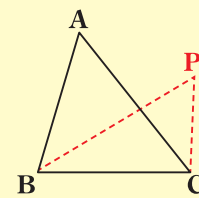


比が等しくなる円周上の点の作図

それでは、今回のチャレンジ問題です。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

△ABCが与えられているとき、PBとPCのなす角がABとACのなす角と等しく、PB : PC = 2 : 1 となるような△PBCをコンパスと定規を用いて1つ描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

問題1の角の二等分線と線分の比の関係をどう使うかを考えてみましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

根本原理

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図1）。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である。（図3）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

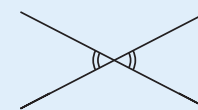


図1 対頂角

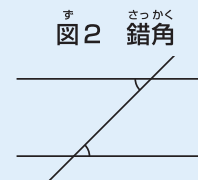


図2 錯角

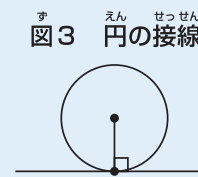


図3 円の接線

図を描くときの注意

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。