



数学の世界をのぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

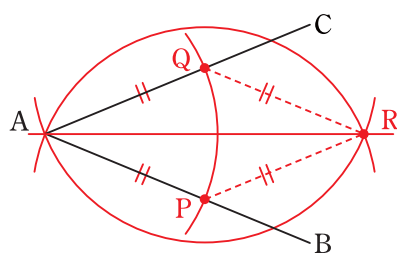
第58回

比が等しくなる点の作図

今回は、比が等しくなる点を作図してもらいます。

角の二等分線の描き方

まずは、コンパスと定規を用いた角を二等分する直線の描き方をおさらいしておきます。



線分AB上に点Pをとり、コンパスでAを中心とする半径APの円を描き、その円と線分AC、または、ACのCの方への延長線との交点をQとします。

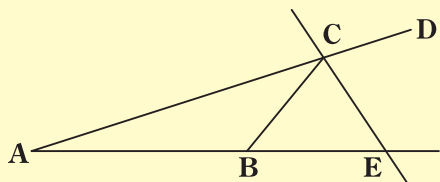
そして、コンパスで、Pを中心とする半径PAの円とQを中心とする半径QAの円を描き、それら2円の2交点のうちAではない点をRとします。すると、直線ARが、ABとACの間の角の二等分線になります。証明は、第2回の記事（2016年2月16日付）にあります。

角の二等分線と線分の比

今回のチャレンジ問題で利用する証明について考えておきましょう。

問題1

△ABCの辺ACのCの方への延長線上に点Dをとり、CBとCDのなす角の二等分線と辺ABのBの方への延長線との交点をEとします。このとき、 $AC:CB = AE:EB$ になることを証明してみましょう。



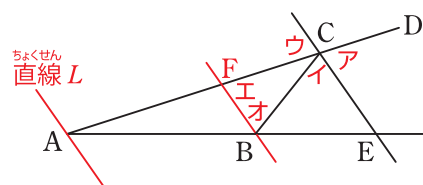
考え方

平行線を引くことで、線分の比の式を作ります。

$AE:EB = AC:$ □ が導けるような補助線を考えてみましょう。

証明

点Aを通りCEと平行な直線LをLとし、点BをとおりCEと平行な直線とACとの交点をFとおきます。



ます。

図のように、角をア、イ、ウ、エ、オとおきます。問題の前提から、 $\text{角ア} = \text{角イ} \dots \text{①}$ です。

すると、CEと直線Lは平行…②、FBとCEは平行…③です。

「3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい」ので、②③より、 $AC:CF = AE:EB \dots \text{④}$ です。

「対頂角は等しい」ので、 $\text{角ア} = \text{角ウ} \dots \text{⑤}$ です。

「2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい」ので、③より、 $\text{角ウ} = \text{角エ} \dots \text{⑥}$ 、 $\text{角イ} = \text{角オ} \dots \text{⑦}$ です。

①⑤⑥⑦より、 $\text{角エ} = \text{角オ} \dots \text{⑧}$ です。

「二角が等しければ二等辺三角形」なので、⑧より、 $CF = CB \dots \text{⑨}$ です。

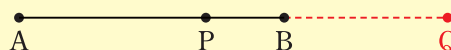
④⑨より、 $AC:CB = AE:EB$ であることが証明できました。

比が等しくなる点の作図

それでは今回のチャレンジ問題です。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

線分AB上に点Pが、 $AP > PB$ となるように与えられているとき、線分ABの延長線上に点Qを、 $AP:PB = AQ:QB$ となるようにコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

問題1をどう使うかを考えてみましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

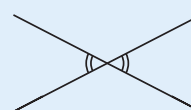
コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

根本原理

- ・定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- ・三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- ・二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- ・一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- ・斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- ・二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。

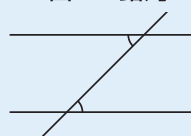
- ・3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。

図1 対頂角



- ・対頂角は等しい（図1）。
- ・2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。

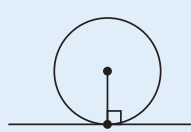
図2 錯角



- ・三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。

- ・ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である。（図3）。

図3 円の接線



- ・平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- ・3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- ・二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- ・二角が互いに等しい三角形は相似である。
- ・三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ・ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

図を描くときの注意

- ・定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。