



# コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

第50回

## 2つの同心円についての作図

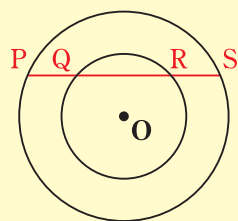
今回は、与えられた2つの同心円（中心が同じ円のことで）についての作図にチャレンジしてもらいます。

### 2つの同心円についてのある性質

今回のチャレンジ問題で必要になる2つの同心円についてのある性質から考えていきましょう。

#### 問題1

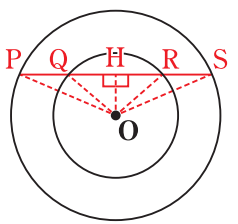
中心がOの2つの同心円が与えられています。その外円上に2点P、Sを弦PSと内円が2交点を持つようにとります。PSと内円の交点をPに近い方からQ、Rとおくとき、 $PQ = RS$ であることを証明してみましょう。



**考え方** 三角形がぴったり重なることを利用してみましょう。

**証明** PS上に点Hを、OHとPSが垂直…①になるようにとります。

$\triangle OPH$ と $\triangle OSH$ において、①より $\angle OHP = \angle OHS = 90^\circ$ なので、 $OP = OS$ （半径）と $OH = OH$ （共通）を考えると、「斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる」ことから、 $\triangle OPH$ と $\triangle OSH$ はぴったり重なることがわかります。よって、 $PH = SH$ …②です。



$\triangle OQH$ と $\triangle ORH$ において、①より $\angle OHQ = \angle OHR = 90^\circ$ なので、 $OQ = OR$ （半径）と $OH = OH$ （共通）を考えると、「斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる」ことから、 $\triangle OQH$ と $\triangle ORH$ はぴったり重なることがわかります。よって、 $QH = RH$ …③です。②③より、 $PH - QH = SH - RH$ なので、 $PQ = RS$ であることが証明できました。

### 対角線が互いの中点で交わる四角形

さらに、チャレンジ問題の準備として、もう1つ問題を考えておいてもらいましょう。

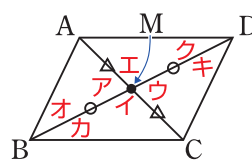
#### 問題2

対角線が互いの中点Mで交わる四角形ABCDは平行四辺形であることを証明してみましょう。

**考え方** 錯角の位置の角が等しいと平行であることを使います。ここでも、三角形がぴったり重なることがカギになります。

**証明** 問題の前提から、 $AM = CM$ …①、 $BM = DM$ …②です。図のように角ア、イ、ウ、エ、オ、カ、キ、クをおきます。

$\triangle ABM$ と $\triangle CDM$ において、「対頂角は等しい」ので、角ア=角ウ…③です。「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ので、①②③より、 $\triangle ABM$ と $\triangle CDM$ はぴったり重なることがわかります。よって、対応する角オと角キは等しいので、「2直線において、錯角の位置の角が等しいならば、その2直線は平行である」ことから、ABとCDは平行…④です。



$\triangle DAM$ と $\triangle BCM$ において、「対頂角は等しい」ので、角エ=角イ…⑤です。「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ので、①②⑤より、 $\triangle DAM$ と $\triangle BCM$ はぴったり重なることがわかります。よって、対応する角クと角カは等しいので、「2直線において、錯角の位置の角が等しいならば、その2直線は平行である」ことから、ADとBCは平行…⑥です。

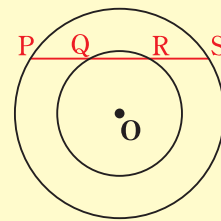
④⑥より、四角形ABCDは平行四辺形であることが証明できました。

### 与えられた2つの同心円についての作図

では、今回のチャレンジ問題です。問題1と問題2がカギになります。がんばって考えてみてくださいね。

#### チャレンジ問題

中心がOの2つの同心円が与えられています。その外円の弦PSと内円の2交点をPに近い方からQ、Rとおきます。



$PQ = QR = RS$ となるような弦PSをコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。ただし、内円の直径は外円の直径の半分より大きいとします。

**考え方**  $PQ = QR = RS$ の図が描けたとします。OQの延長線上に $OQ = QA$ となる点Aをとると、四角形OPARは問題2から平行四辺形になります。この点Aから、点P、R、Sを決めることを考えてみましょう。

### 証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

#### 根本原理

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しいならば二等辺三角形である。

- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。

- 対頂角は等しい（図1）。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しいならば、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である（図3）。

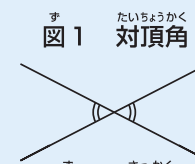


図1 対頂角

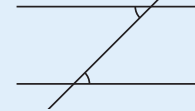


図2 錯角

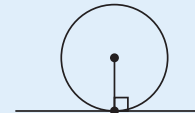


図3 円の接線

- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

#### 図を描くときの注意

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。