# 数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

# コンパスと定規で描ける図形の世界

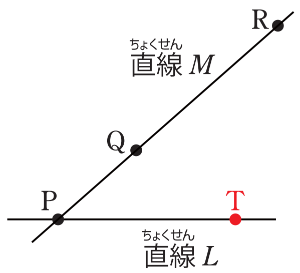
……ユークリッド幾何の世界……

## 第46回 与えられた三角形と面積が等しい正三角形を描いてみよう

今回は、与えられた三角形と面積が等しい正三角形の作図について考えていきます。

### 相似な三角形の描き方

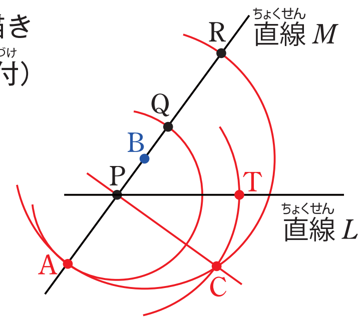
平行でない2直線$L$、$M$の交点をPとし、直線$M$上にP、Q、Rの順になるように点Q、Rをとります。このとき、直線$L$上にPQ×PR＝PT×PT（このとき△PQTと△PTRは相似になります）となる点Tの1つをコンパスと定規を用いて描く方法は、例えば以下のようになります。




まず、点Pを中心とし半径PQの円Pを描きます。そして、直線$M$と円Pの交点のうち、Qではない方をAとします。

次に線分ARの中点Bを描き（中点の描き方は、第5回の記事（2016年5月19日付）を見てください）、点Bを中心とし半径BAの円Bを描きます。

さらに直線$M$上の点Pを通り直線$M$と垂直な直線を描き（垂直な直線の描き方は、第8回の記事（2016年8月18日付）を見てください）、その直線と円Bとの交点の1つをCとします（△APCと△CPRが相似になるので、PA×PR＝PC×PCとなります）。



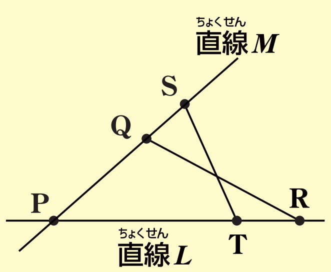

最後に、点Pを中心とし半径PCの円と直線$L$との交点の1つをTとすると、このTが求める点になります。証明を知りたい人は第44回の記事（2019年8月15日付）を見てください。

### 一つの角を共有する面積が等しい2つの三角形

さて、チャレンジ問題の前に、問題を一つ考えてもらいましょう。

**問題1**

平行でない2直線$L$、$M$の交点をPとし、直線$M$上にP、Q、Sの順になるように点Q、Sをとり、直線$L$上にP、T、Rの順になるように点T、Rをとります。このとき、「PQ×PR＝PS×PTならば△PQRと△PSTの面積が等しい」ことを証明してみましょう。

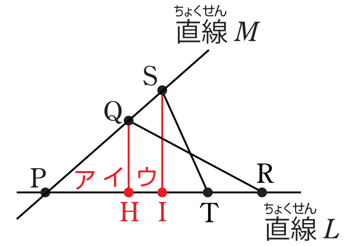



**考え方**

三角形の面積が、底辺×高さ÷2で求まることを利用しましょう。

**証明**

直線$L$上に点H、Iを、「QH、SIがそれぞれ直線$L$と垂直になる」…①のようにとり、PSとPIの間の角をア、HPとHQの間の角をイ、IPとISの間の角をウとおきます。




すると①より、角イ＝角ウ（＝90度）…②です。

△PQHと△PSIにおいて、「二角が互いに等しい三角形は相似である」ことから、②と角アが共通より、△PQHと△PSIは相似です。

よって、対応する辺の比は等しいので、QH：PQ＝SI：PS、

すなわち、QH÷PQ＝SI÷PSなので、QH＝$\frac{PQ\times SI}{PS}$…③です。

また、仮定よりPQ×PR＝PS×PTなので、PT＝$\frac{PQ\times PR}{PS}$…④です。

よって、

△PQRの面積＝PR×QH×$\frac{1}{2}$＝PR×$\frac{PQ\times SI}{PS}$×$\frac{1}{2}$（③より）

＝$\frac{PQ\times PR}{PS}$×SI×$\frac{1}{2}$＝PT×SI×$\frac{1}{2}$（④より）

＝△PSTの面積

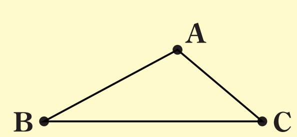
なので、「PQ×PR＝PS×PTならば△PQRと△PSTの面積が等しい」ことが証明できました。

### 与えられた三角形と面積が等しい正三角形を描いてみよう

それでは今回のチャレンジ問題です。ここまでの記事をヒントに、がんばって考えてみてくださいね。

**チャレンジ問題**

右の図の△ABCに対して、面積が等しい正三角形をコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。




**考え方**

本文の記事と 問題1 をヒントに考えてみましょう。

### 証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

**〈根本原理〉**

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図1）。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である（図3）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

図1 対頂角

図2 錯角

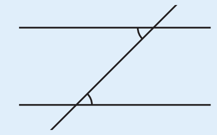
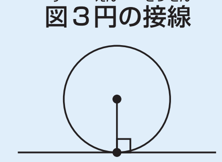


図3 円の接線



**〈図を描くときの注意〉**

・定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。