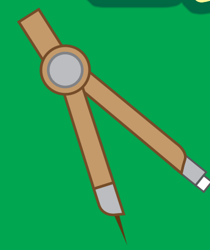
数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎



コンパスと定規で描ける図形の世界

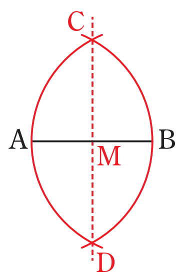
……ユークリッド幾何の世界……

第44回 相似な三角形を描いてみよう

今回は、相似な三角形の作図について考えます。

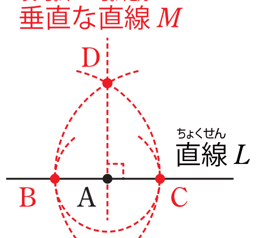
線分の中点や直線上のある点における垂線の作図

まずは、線分の中点の描き方をおさらいしておきます。線分ABにおいて、点Aを中心とし半径ABの円と点Bを中心とし半径ABの円を描き、その2円の交点をC、Dとします。このとき、2点C、Dを通る直線を描けば、ABとCDの交点Mが線分ABの中点になっています。証明を知りたい人は、第5回の記事（2016年5月19日付）を見てください。



次に、直線上のある点を通り、その直線と垂直な直線の描き方も確認しておきましょう。

直線LとL上の点Aが与えられているとき、点Aを通り直線Lと垂直な直線Mを描くには、右の図のように点Aを中心とする円を1つ描き、その円と直線Lとの交点をB、Cとします。次に、点Bを中心とする半径BCの円と点Cを中心とする半径BCの円を描き、それら2円の交点のうちの1つをDとします。そして、2点AとDを通る直線を描けば、その直線が点Aを通り直線Lと垂直な直線Mになるのでした。証明を知りたい人は、第8回の記事（2016年8月18日付）を見てください。

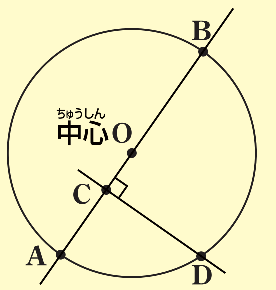


円と三角形の相似

円と三角形の相似についてのある性質を証明しておきます。

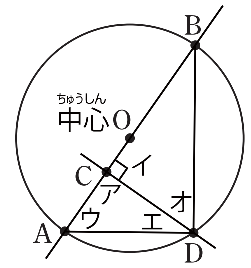
問題1

中心OのOにおいて、直径AB上の点Cを通り直径と垂直な直線と円周との交点の1つをDとします。このとき、AC×BC=CD×CDであることを証明してみましょう。



考え方 AC×BC＝CD×CDを証明するには、AC÷CD＝CD÷BC、すなわち、AC：CD＝CD：BCを証明すればよいわけです。この比の式を証明するには、もちろん相似を使います。

証明 図のように、角をア、イ、ウ、エ、オとおきます。△ACDと△DCBにおいて、ABとCDは垂直なので、角ア＝角イ＝90度…①です。△ACDにおいて、「三角形の内角の和は180度」より、角ウ＝180度－角ア－角エ…②です。①②より、角ウ＝180度－90度－角エなので、角ウ＝90度－角エ…③です。



また、「ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である」ことから、角エ＋角オ＝弧ABに対する円周角＝弧ABに対する中心角の半分＝OAとOBのなす角の半分…④です。「3点A、C、Bがこの順番で一直線上にあるならば、CAとCBのなす角は180度である」ことから、OAとOBのなす角＝180度…⑤です。

よって、④⑤より、角エ＋角オ＝180度÷2＝90度、すなわち、角オ＝90度－角エ…⑥であり、③⑥より、角ウ＝角オ…⑦です。

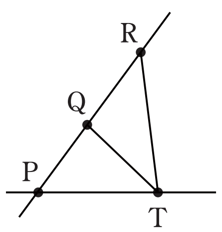
よって、「二角が等しい三角形は相似である」ことから、①⑦より、△ACDと△DCBは相似であることが証明できました。

したがって、相似の対応辺の比を考えて、AC：CD＝CD：BCです。

よって、AC÷CD＝CD÷BCなので、AC×BC＝CD×CDが証明できました。

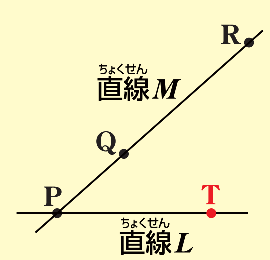
相似な三角形を描いてみよう

右の図で、PQ×PR＝PT×PT、すなわち、PQ：PT＝PT：PRのとき、二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似なので、△PQTと△PTRは相似です。この図の3点P、Q、Rが与えられているときに、点Tを作図することを今回のチャレンジ問題にしたいと思います。ここまでの記事をヒントに、がんばって考えてみてくださいね。



チャレンジ問題

平行でない2直線L、Mの交点をPとし、直線M上にP、Q、Rの順になるように点Q、Rをとります。このとき、直線L上にPQ×PR＝PT×PTとなる点Tの1つをコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方 本文の記事と**問題1**で証明した結果をヒントに考えてみましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

〈根本原理〉

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図1）。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である（図3）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2組の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

図1 対頂角

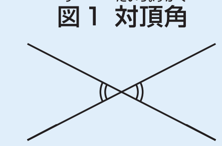


図2 錯角

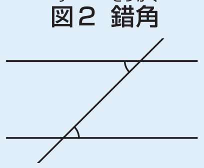
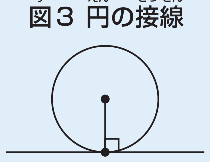


図3 円の接線



〈図を描くときの注意〉

・定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。