



数学の世界をのぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

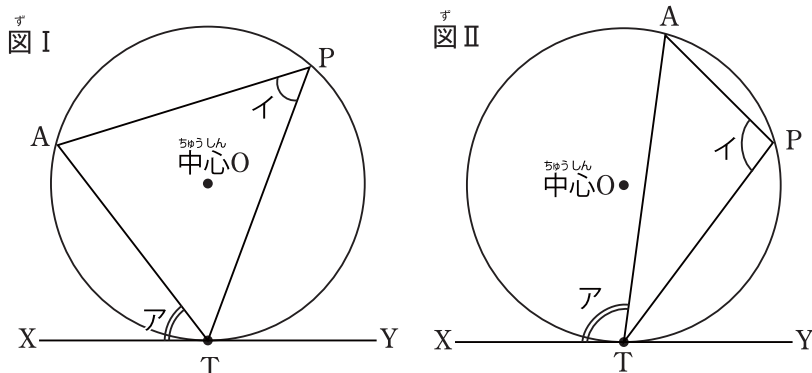
第43回

円の接線と三角形の相似

今回は、円の接線と三角形の相似について考えてもらいます。円の接線とは円と1点のみでくっついている直線のことです。

接弦定理

前回の記事で、接弦定理とよばれる図形の性質を証明しました。どのような内容だったかをおさらいしておく、下の図ⅠやⅡにおいて、(弦TAと接線TXの間の角である) 円の接線と弦のなす角アと、(PAとPTの間の角である) 弦ATをふくむ円周角イが必ず等しくなるというものでした。証明が気になる人は、第42回の記事(2019年5月16日付)を見てください。



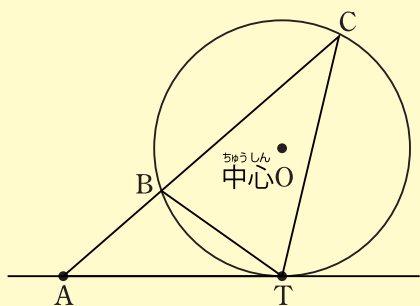
今回はこの円の接線とその接点をふくむ円周上の3点を頂点にもつ三角形について考えていきます。

円の接線と三角形の相似

まずは、円の接線と三角形の相似についてのある性質を証明してみましょう。

問題1

中心Oの円Oに対し、円周上の点Tにおける接線を引き、その接線上に点Aをとります。点Aを通り円Oと2点で交わる直線を引き、その2交点をAに近い方からB、Cとおくとき、 $AB \times AC = AT \times AT$ であることを証明してみましょう。

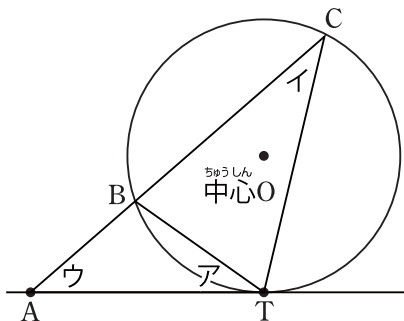


考え方

$AB \times AC = AT \times AT$ を証明するには、 $AB \div AT = AT \div AC$ 、すなわち、 $AB : AT = AT : AC$ を証明すればよいわけです。そこで、辺の比の式を証明するにはと考えると……。

証明

図のように、角をア、イ、ウとおきます。 $\triangle ABT$ と $\triangle ATC$ において、直線ATが円Oの接線なので、接弦定理より、角ア=角イ…①です。また、角ウは共通…②です。



よって、「二角が等しい三角形は相似である」ことから、①②より、 $\triangle ABT$ と $\triangle ATC$ は相似であることが証明できました。したがって、相似の対応辺の比を考えて、 $AB : AT = AT : AC$ です。

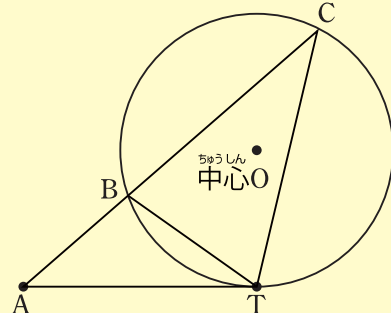
よって、 $AB \div AT = AT \div AC$ なので、 $AB \times AC = AT \times AT$ が証明できました。

三角形の相似と円の接線になるための条件

では **問題1** とは逆に、 $AB \times AC = AT \times AT$ 、すなわち、 $\triangle ABT$ と $\triangle ATC$ が相似のとき、直線ATが円の接線になることの証明を今回のチャレンジ問題にしたいと思います。ここまでの記事をヒントに、がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

下の図において、 $AB \times AC = AT \times AT$ である。このとき、直線ATが円Oの点Tにおける接線であることを証明してみましょう。



考え方

「ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である」ことを利用してみましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

根本原理

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。

- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。

- 対頂角は等しい(図1)。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい(図2)。

- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。

- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である(図3)。

- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分である。

図を描くときの注意

- 定規は目盛がないものとします。直線を引きこ以外には使えません。

図1 対頂角

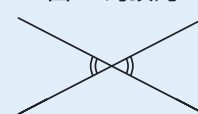


図2 錯角



図3 円の接線



チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。