



数学の世界をのぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

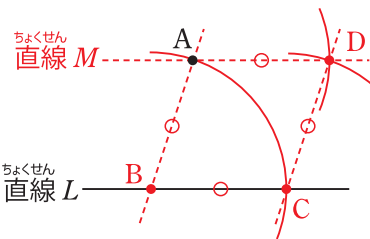
……ユークリッド幾何の世界……

第39回 三角形の辺上に長さの比が等しくなる点を描いてみよう

今回は、与えられた三角形の辺上に長さの比が等しくなるような点の作図について考えてもらいます。

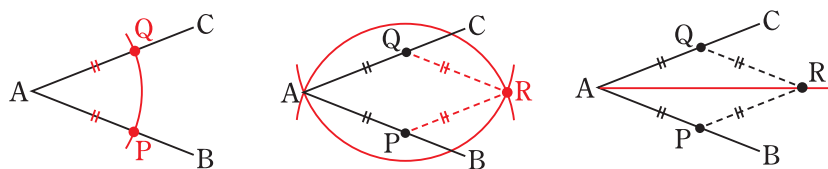
平行線や角の二等分線を考えよう

まずは、コンパスと定規を用いた平行線の描き方を確認しておきましょう。直線LとL上にはない点Aが与えられているとき、点Aを通り直線Lと平行な直線Mをコンパスと定規を用いて描く方法の一つは、右の図の



ようにひし形ABCDを描くことでした。今回の作図でも、この平行線の作図のお世話になるので、しっかり理解しておきましょう。証明は、第34回(2018年10月18日付)の記事にあります。

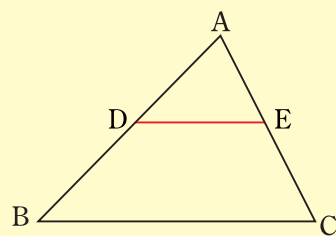
次に、線分ABとACの間の角を二等分する直線の描き方もおさらいしておきます。線分AB上に点Pをとり、コンパスでAを中心とする半径APの円を描き、その円と線分AC、または、ACのCの方への延長線との交点をQとします。



そして、コンパスで、Pを中心とする半径PAの円とQを中心とする半径QAの円を描き、それら2円の2交点のうちAではない点をRとします。すると、直線ARが、ABとACの間の角の二等分線になります。証明は、第2回(2016年2月18日付)の記事にあります。垂線と角の二等分線の作図を利用して、まずは、次の問題を考えてみましょう。

問題1

△ABCの辺AB上に点D、辺AC上に点EをAD=ECで、DEとBCが平行になるようにコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



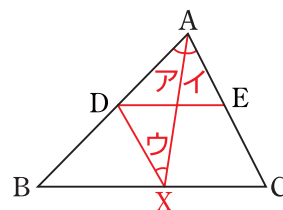
考え方

角の二等分線と平行線がカギになります。

描き方

平行線や角の二等分線の描き方は本文のように描くとします。まず、点Aを通る辺ABと辺ACの間の角の二等分線を描き、この角の二等分線と辺BCとの交点をXとします。次にXを通り辺ACと平行な直線を描き、この平行線と辺ABとの交点をDとします。

さらに、点Dを通り辺BCと平行な直線を描き、この平行線と辺ACとの交点をEとすると、これらのD、Eが求める点になります。



証明

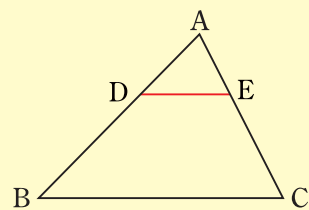
図のように、角をア、イ、ウとおきます。すると、図の描き方から、角ア=角イ…①、ACとDXは平行…②、DEとBCは平行…③です。「2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい」ので、②より、角イ=角ウ…④です。よって、①④より、角ア=角ウ…⑤とわかります。「二角が等しければ二等辺三角形」であることから、⑤より、△ADXはDA=DX…⑥の二等辺三角形です。②③より、DECXは平行四辺形なので、「平行四辺形の向かい合う辺は等しい」ことから、DX=EC…⑦です。よって、⑥⑦より、AD=ECなので、③も考えて、正しく図が描けていることが証明できました。

三角形の辺上に長さの比が等しくなるような点を描いてみよう

それでは、今回のチャレンジ問題です。ここまでの記事をヒントに、がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

△ABCの辺AB上に点D、辺AC上に点Eを2AD=ECで、DEとBCが平行になるようにコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

問題1と相似を利用します。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

根本原理

- ・ 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- ・ 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- ・ 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- ・ 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- ・ 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- ・ 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- ・ 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- ・ 対頂角は等しい(図1)。
- ・ 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい(図2)。
- ・ 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ・ ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である(図3)。
- ・ 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- ・ 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- ・ 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- ・ 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- ・ 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。

図1 対頂角

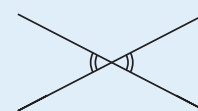


図2 錯角

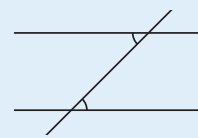
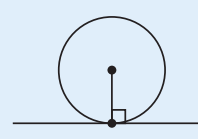


図3 円の接線



図を描くときの注意

- ・ 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。