



数学の世界をのぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎

第38回

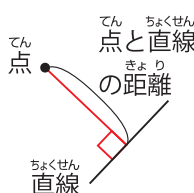
コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

点と直線からの距離が等しくなる点を描いてみよう

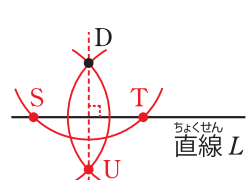
今回は与えられた点と直線からの距離が等しくなるような点の作図について考えてもらいます。

ちなみに、ある点とある直線の距離とは、その点から直線に引いた垂線の長さのことです。

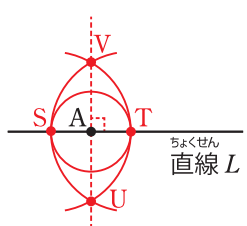


垂線や角の二等分線を考えよう

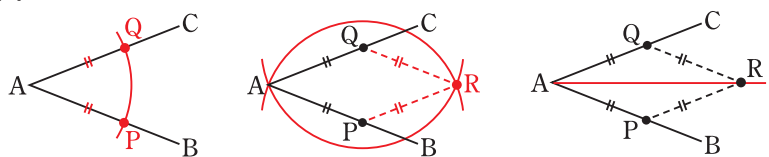
最初に、ある直線Lとその直線上にない点Dが与えられているときに、点Dからその直線Lへの垂線の描き方の1つをおさらいしておきます。



点Dを中心とする円を1つ描き、その円と直線Lとの交点をS、Tとします。そして、点Sを中心とする半径DSの円と点Tを中心とする半径DTの円を描き、それら2円の2交点のうちDではない点をUとします。2点DとUを通る直線を描けば、その直線が点Dを通り直線Lと垂直な直線になります。証明は、第13回(2017年1月19日付)の記事にあります。



次に、線分ABとACの間の角を二等分する直線の描き方の1つをおさります。線分AB上に点Pをとり、コンパスでAを中心とする半径APの円を描き、その円と線分AC、または、ACのCの方への延長線との交点をQとします。

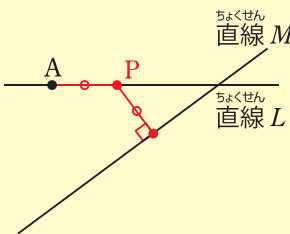


そして、コンパスで、Pを中心とする半径PAの円とQを中心とする半径QAの円を描き、それら2円の2交点のうちAではない点をRとします。すると、直線ARが、ABとACの間の角の二等分線になります。証明は、第2回(2016年2月18日付)の記事にあります。

垂線と角の二等分線の作図を利用して、まずは、次の問題を考えてみましょう。

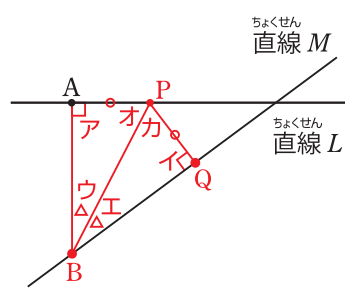
問題1

2直線LとM、直線L上の点Aが与えられているとき、点Aと直線Mからの距離が等しくなるような直線L上の点Pを1つ、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方 正しく描けていることの証明には、2つの三角形がぴったり重なっていることを利用します。

描き方 垂線や角の二等分線の描き方は本文のように描くとします。まず、点Aを通り直線Lと垂直な直線を描き、その垂線と直線Mとの交点をBとします。つぎ、点Bを通るBAと直線Mの間の角の二等分線を描きます。すると、この角の二等分線と直線Lとの交点が求める点Pになります。



証明 直線M上に点Qを、QPとQBの間の角が90度となるようにとり、図のように、角をア、イ、ウ、エ、オ、カとおきます。

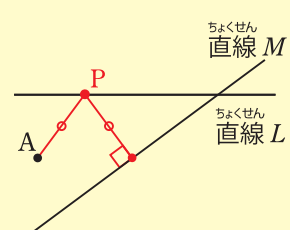
よって、角イ=90度…①です。また、図の描き方から、角ア=90度…②、角ウ=角エ…③、①②より、角ア=角イ…④です。「三角形の内角の和は180度」より、角オ=180度-角ア-角ウ…⑤、角カ=180度-角イ-角エ…⑥なので、③④⑤⑥より、角オ=角カ…⑦です。「一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ので、③⑦とBPが共通なことから、△ABPと△QBPはぴったり重なります。よって、APとQPは重なるので、点Pが点Aと直線Lからの距離が等しくなるような点であることが証明できました。

点と直線からの距離が等しくなる点を描いてみよう

それでは、今回のチャレンジ問題です。ここまでの記事をヒントに、がんばって考えてみてください。

チャレンジ問題

交わっている2直線L、Mとその2直線上にない点Aが与えられているとき、点Aと直線Mからの距離が等しくなるような直線L上の点Pを1つ、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方 問題を解くカギは、ずばり相似です。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

根本原理

- ・ 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- ・ 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- ・ 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- ・ 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- ・ 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- ・ 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。

- ・ 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。

- ・ 対頂角は等しい(図1)。
- ・ 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい(図2)。

- ・ 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。

- ・ ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である(図3)。

- ・ 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- ・ 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- ・ 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- ・ 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- ・ 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。

図を描くときの注意

- ・ 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

図1 対頂角

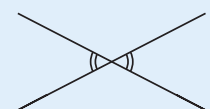


図2 錯角

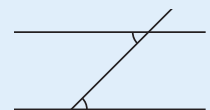


図3 円の接線



チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。