

数学の世界をのぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

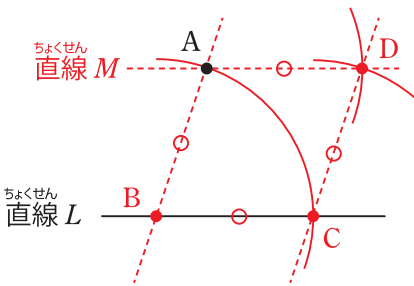
第35回

平行線を利用して図を描こう

今回は平行線を利用した作図にチャレンジしてもらいます。

平行線の切り取る線分の比

前回、コンパスと定規を用いた平行線の描き方の一つを確認しました。直線LとL上にない点Aが与えられているとき、点Aを通り直線Lと平行な直線Mをコンパスと定規を用いて描く方法の一つは、右の図

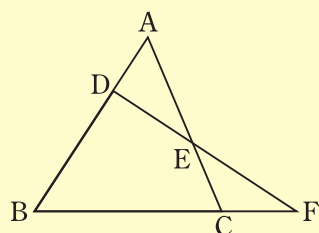


のようにひし形ABCDを描くことができました。今回の作図でも、この平行線の作図のお世話になるので、しっかり理解しておきましょう。証明が知りたい人は、第34回(2018年10月18日付)の記事をご覧ください。

さて、今回のチャレンジ問題の証明では、「3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい」という根本原理を利用します。そこで、この根本原理の証明に慣れるために、問題を1題解いてみることにしましょう。

問題1

△ABCの辺AB上に点DをAD : DB = 2 : 5となるようにとり、辺AC上に点EをAE : EC = 4 : 3になるようにとります。さらに、BCの延長線とDEの延長線との交点をFとします。このとき、DE : EFを求めて、それが正しいことを証明してみましょう。

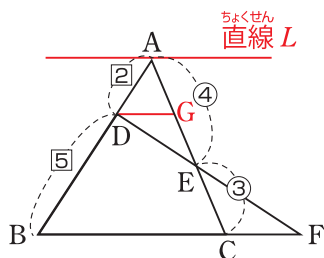


考え方

「3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい」という根本原理を使うために、どのような平行線を引くとよいかを考えてみましょう。

証明

問題の仮定から、AD : DB = 2 : 5 …①、AE : EC = 4 : 3 …②です。辺AC上に点Gを、DG // BFとなるようにとり、点Aを通りBFと平行



な直線Lを引きます。

よって、直線L // DG // BF …③です。

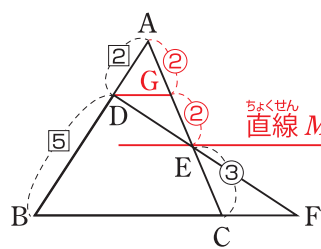
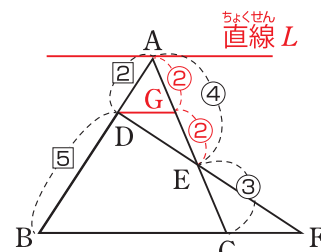
「3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい」ことから、③より、AG : GC = AD : DB …④です。

①④より、AG : GC = 2 : 5 …⑤なので、②⑤より、AG : GE : EC = 2 : 2 : 3 …⑥です。

さらに、点Eを通りBFと平行な直線Mを引くと、③より、DG // 直線M // BF …⑦です。

「3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい」ことから、⑦より、DE : EF = GE : EC …⑧です。

⑥⑧より、DE : EF = 2 : 3とわかりました。

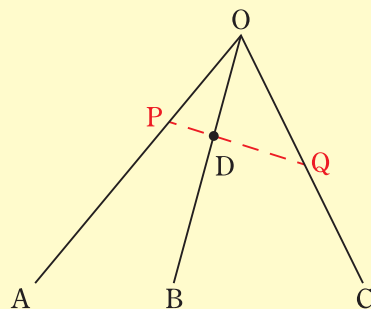


平行線を利用して図を描こう

では、今回のチャレンジ問題です。根本原理の「3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい」をどう使うかがカギになります。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

下の図のように線分OA、OB、OCとOB上の点Dが与えられています。OA上の点PとOC上の点Qを、2PD = DQ、すなわち、PD : DQ = 1 : 2となるように、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

平行線をいろいろ引いて、うまくいく平行線を探してみましょう。

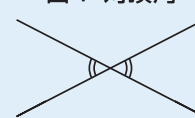
証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

根本原理

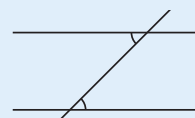
- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 直角三角形の斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい(図1)。

図1 対頂角



- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい(図2)。

図2 錯角



- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である(図3)。

図3 円の接線



- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。

図を描くときの注意

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。