数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

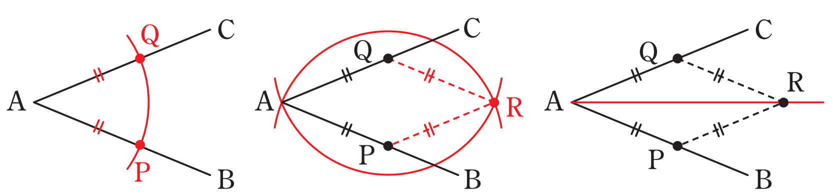
……ユークリッド幾何の世界……

第32回 2直線に接する円の作図

今回は、2直線に接する円の作図について考えていきます。

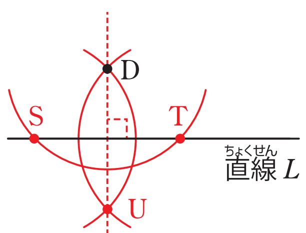
まずは問題を解いてみよう

まず、角の二等分線や、直線への垂線の描き方をおさらいしておきましょう。線分ABとACの間の角を二等分する直線の描き方の1つは、次の通りです。線分AB上に点Pをとり、コンパスでAを中心とする半径APの円を描き、その円と線分AC、または、ACのCの方への延長線との交点をQとします。



次に、コンパスで、Pを中心とする半径PAの円とQを中心とする半径QAの円を描き、それら2円の2交点のうちのAではない点をRとします。すると、直線ARが、ABとACの間の角の二等分線になります。証明は、第2回（2016年2月18日付）の記事にあります。

ある直線Lとその直線上にない点Dが与えられているときに、点Dからその直線Lへの垂線の描き方の1つは次の通りです。

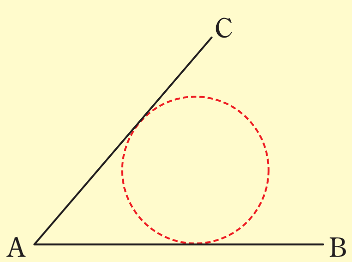


点Dを中心とする円を1つ描き、その円と直線Lとの交点をS、Tとします。次に、点Sを中心とする半径DSの円と点Tを中心とする半径DTの円を描き、それら2円の2交点のうちのDではない点をUとします。2点DとUを通る直線を描けば、その直線が点Dを通り直線Lと垂直な直線になります。証明は、第13回（2017年1月19日付）の記事にあります。

これらの作図をヒントに、まずは、次の問題を考えてみましょう。

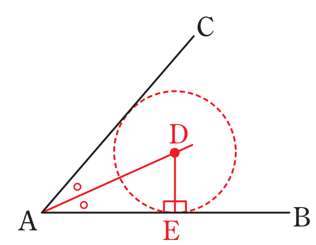
問題1

3点A、B、Cが一直線上にない線分ABと線分ACが与えられているとき、それら2つの線分と接する円を、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。

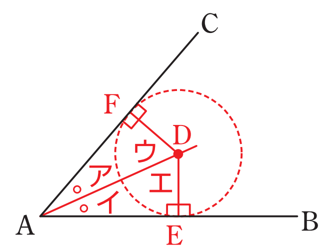


考え方 証明には、三角形がぴったり重なることを利用しましょう。

描き方 まず、ABとACの間の角の二等分線を描き、その二等分線上に点Dをとります。次に、Dを通りABと垂直な直線を描き、その直線とABの交点をEとします。最後に、Dを中心とし半径DEの円を描くと、その円がABとACの両方に接している円になります。



証明 Dを通りACと垂直な直線とACの交点をFとし、図のように角ア、イ、ウ、エをおきます。△ADEと△ADFにおいて、ADがABとACの間の角の二等分線なので、角ア＝角イ…①です。



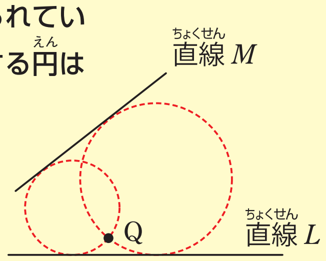
また、「三角形の内角の和は180度である」ことから、
角ウ＝180度－90度－角ア＝90度－角ア…②
角エ＝180度－90度－角イ＝90度－角イ…③です。
よって、①②③から、角ウ＝角エとわかります。
したがって、AD＝AD、角ア＝角イ、角ウ＝角エより、「一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、△ADEと△ADFはぴったり重なります。よって、DE＝DF…④です。④より、Dを中心とし、DEを半径とする円は、2点E、Fを通ります。
ここで、DE、DFはそれぞれAB、ACと垂直なので、「中心がOである円Oの円周上の点Tを通る直線は、半径OTと垂直であるならば接線である」ことから、線分ABと線分ACは点E、Fで、この円と接しているとわかりました。
以上で、正しく図が描けていることが証明できました。

与えられた点を通り、平行でない2直線に接する円の作図

今回のチャレンジ問題は、問題1の発展問題です。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

平行でない2直線L、Mと点Qが与えられているとき、点Qを通り2直線L、Mと接する円は図のように2つあります。このうち小さい方の円を、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方 証明には、三角形が相似になることを利用しましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

〈根本原理〉

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 直角三角形の斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図1）。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である（図3）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。

図1 対頂角

図2 錯角

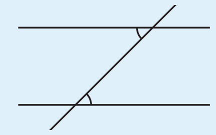
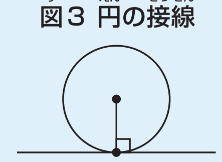


図3 円の接線



〈図を描くときの注意〉

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。