



数学の世界をのぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

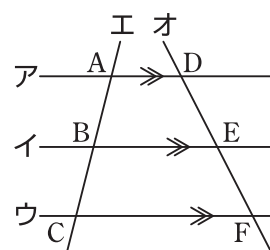
第30回

平行線が切り取る線分の比

今回は、3本の平行線が切り取る線分の長さの比が等しくなることについて考えていきます。この性質は相似の基礎になる大切な性質です。

まずは問題を解いてみよう

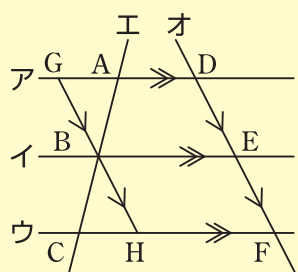
まずは、3本の平行線の切り取る2本の線分の長さが等しい場合について考えていきます。3本の平行な直線ア、イ、ウに対し、直線ア、イ、ウが直線エと交わる点をそれぞれA、B、Cとし、直線ア、イ、ウが直線オと交わる点をそれぞれD、E、Fとします。



このとき、 $AB=BC$ ならば $DE=EF$ であることを証明していきたいと思います。

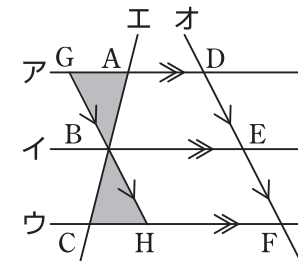
問題1

3本の平行な直線ア、イ、ウがあります。直線ア、イ、ウが直線エと交わる点をそれぞれA、B、Cとし、直線ア、イ、ウが直線オと交わる点をそれぞれD、E、Fとします。このとき、点Bを通りDFと平行な直線と直線ア、ウとの交点をそれぞれG、Hとすることで、 $AB=BC$ ならば $DE=EF$ であることを証明してみましょう。



考え方 三角形の合同（ぴったり重なること）と平行四辺形をうまく利用することを考えてみましょう。

証明 問題文から、 $AD \parallel BE \parallel CF$ ①、 $GH \parallel DF$ ②、 $AB=BC$ ③です。



$\triangle ABG$ と $\triangle CBH$ において、①より、 $AG \parallel CH$ なので、「2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい」ことから、 AB と AG の間の角と CB と CH の間の角は等しい…④とわかります。

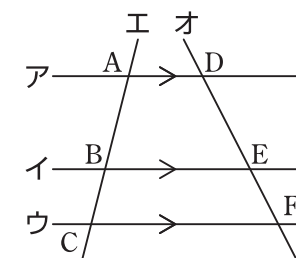
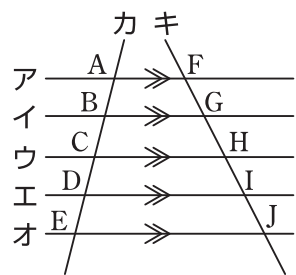
また、「対頂角は等しい」ので、 BA と BG の間の角と BC と BH の間の角は等しい…⑤です。「一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ので、③④⑤より、 $\triangle ABG$ と $\triangle CBH$ はぴったり重なる…⑥とわか

ります。⑥より、 $BG=BH$ もぴったり重なるので、 $GB=BH$ …⑦です。ここで、①②より、 $GBED$ は平行四辺形…⑧、 $BHFE$ は平行四辺形…⑨です。「平行四辺形の向かい合う辺は等しい」ので、⑧より $GB=DE$ …⑩、⑨より $BH=EF$ …⑪です。よって、⑦⑩⑪より、 $DE=EF$ が証明できました。

3本の平行線が切り取る線分の長さの比

問題1の結果より、「3本の平行線がある直線から切り取る2本の線分の長さが等しければ、3本の平行線がそれとは別の直線から切り取る2本の線分の長さも等しい」…☆ことがわかりました。

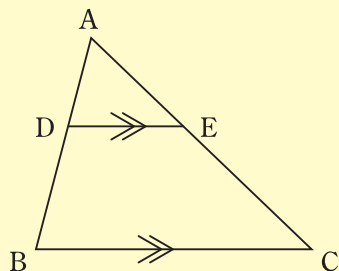
この☆を繰り返し使おうと、例えば右の図のような場合に、直線ア、イ、ウ、エ、オが平行で $AB=BC=CD=DE$ ならば、 $FG=GH=HI=IJ$ となることが証明できます。同様に考えると、☆を繰り返し用いることで「3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しくなる」こと（平行線と線分比の原理といいます）がわかります。今回のチャレンジ問題は、この平行線と線分比の原理を使う問題です。がんばって考えてみてくださいね。



直線ア、イ、ウが平行ならば、 $AB:BC=DE:EF$

チャレンジ問題

$\triangle ABC$ の辺 AB 上に点 D を、辺 AC 上に点 E を、直線 BC と直線 DE が平行になるようにとりまします。このとき、 $AD:AB=DE:BC$ を証明してください。



考え方 平行線と線分比の原理をどう使うかを考えましょう。平行線の補助線が鍵になります。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときを使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

根本原理

- 定規で、2点を通る直線が引ける。
- コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる（3つの角も互いに等しい）。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる（残りの辺と角も互いに等しい）。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 直角三角形の斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図1）。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である（図3）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。

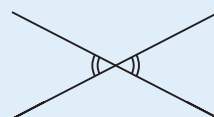


図1 対頂角

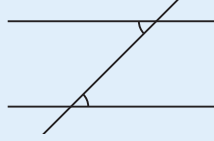


図2 錯角

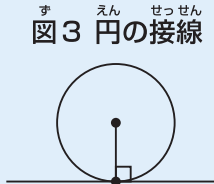


図3 円の接線

図を描くときの注意

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。