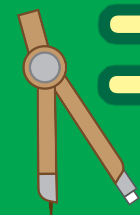
数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎



コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

第29回 半径が変えられないコンパスで図を描いてみよう

今回は、コンパスがこわれてしまって半径が変えられなくなったときに、どのように図を描くのかを考えてみます。

まずは問題を解いてみよう

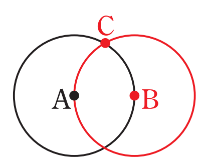
定規とこわれてしまって半径が変えられなくなったコンパスで図を描くといっても、どんな大きさでもいいから正三角形を一つ描いてみるということであれば、こわれていないコンパスの場合と変わりません。まずは、この問題を考えてみましょう。

問題１

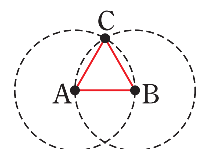
定規とこわれてしまって半径の変えられないコンパスを使って、どんな大きさでもよいので正三角形を一つ描き、その描き方が正しいことを証明してください。

考え方 正三角形は辺の長さがすべて等しいことを考えると……。

描き方 まず１つの点Aをとり、その点Aを中心とする円をコンパスで描きます。次にその円上に点Bをとり、その点Bを中心とする円を描きます。２つの円の２つの交点のうち、どちらでもよいので、どちらか１つをCとすると、△ABCが正三角形になります。



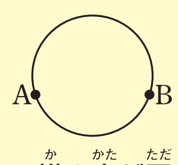
証明 中心と円周上の点の間の長さ（半径）は一定です。コンパスの半径は変わらないので、Aを中心とする円とBを中心とする円はどちらも半径がABの円です。よって、点B,Cは、中心A、半径ABの円周上にあるので、AB＝ACです。同様に考えると、BA＝BCなので、AB＝AC＝BCになります。
したがって、辺の長さがすべて等しいので、△ABCは正三角形です。



さらに次の問題を考えてみましょう。

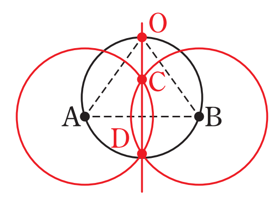
問題２

ある円とその円周上の２点A、Bが与えられているとします。定規とこわれてしまって半径の変えられないコンパスを使って、点Oがその円周上にあり、OA＝OBとなる二等辺三角形を１つ描き、その描き方が正しいことを証明してください。ただし、こわれたコンパスの半径はABの半分より長く、ABではないとします。

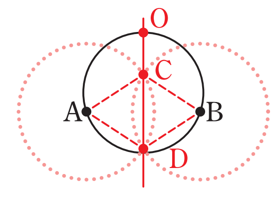


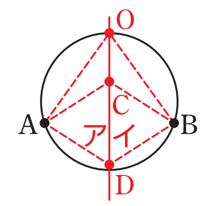
考え方 OA＝OBとなる点OとABの垂直二等分線の関係を考えてみると……。

描き方 コンパスを使ってAを中心とする円とBを中心とする円を描くと、半径がABの半分より大きいので、２つの円は２点で交わります。それらの点をC、Dとします。C、Dを通る直線を描き、はじめにあたえられている円との２つの交点のうち１つをOとすると、△OABがOA＝OBである二等辺三角形になります。



証明 図の描き方から、AC＝AD＝BC＝BD…①です。「三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ので、①とCDが共通より、△ACDと△BCDはぴったり重なる…②とわかります。図のように、角をア、イとおくと、②より、角ア＝角イ…③です。
また、①より、AD＝BD…④です。
「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ので、③④とODが共通より、△ADOと△BDOはぴったり重なるとわかります。よって、OA＝OBとわかりました。
したがって、△OABはOA＝OBの二等辺三角形です。



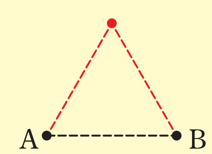


一辺があたえられているとき、正三角形を描いてみよう

では、今回のチャレンジ問題です。コンパスの半径と違う長さの線分ABがあたえられているとき、ABを一辺とする正三角形をこわれたコンパスで描いてみましょう。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

２点ABがあたえられているとき、線分ABを一辺とする正三角形を、定規とこわれてしまって半径の変えられないコンパスを使って描き、その描き方が正しいことを証明してください。ただし、こわれたコンパスの半径はABの半分より長く、ABより短いとします。



考え方 問題１、問題２を参考にして、いろいろ円を描いて考えましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

〈根本原理〉

- 定規で、２点を通る直線が引ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる（３つの角も互いに等しい）。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる（残りの辺と角も互いに等しい）。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 直角三角形の斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- ３点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、３点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図１）。
- ２直線において、錯角の位置の角が等しければ、その２直線は平行である。逆に、２直線が平行であれば、その２直線に対する錯角の位置の角は等しい（図２）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である（図３）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。

図１ 対頂角

図２ 錯角

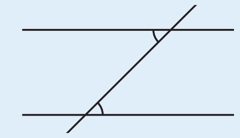
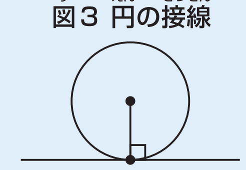


図３ 円の接線



〈図を描くときの注意〉

・定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。