数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

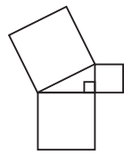
……ユークリッド幾何の世界……

第27回 たての長さが1、横の長さが5の長方形を調べてみよう

今回は、たての長さが１、横の長さが５の長方形について調べてみます。面積を数値で表す考え方、長方形の面積がたて×よこ、三角形の面積が底辺×高さ÷２などは知っているものとします。

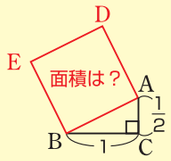
ピタゴラスの定理の逆定理

まずはピタゴラスの定理を確認しておきましょう。ピタゴラスの定理は「直角三角形の直角をはさむ二辺の上の２つの正方形の面積の和が、直角の向かいの斜辺の上の正方形の面積と等しい」という定理でした。



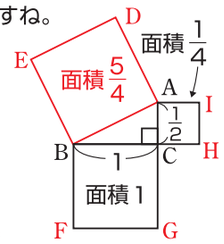
問題１

CAとCBの間の角が直角で、BC＝１、AC＝$\frac{1}{2}$である直角三角形ABCにおいて、斜辺ABの上の正方形ADEBの面積を求めましょう。



考え方 素直にピタゴラスの定理を使えばよいですね。

解答 問題の設定から、CAとCBの間の角が直角…①です。図のように、正方形BFGCと正方形ACHIを考えます。



BC＝1より、正方形BFGCの面積は1…②、

AC＝$\frac{1}{2}$より、正方形ACHIの面積は$\frac{1}{4}$…③です。

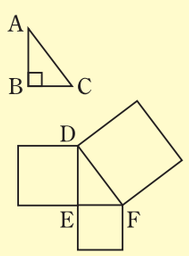
ピタゴラスの定理「直角三角形の直角をはさむ二辺の上の２つの正方形の面積の和が、直角の向かいの斜辺の上の正方形の面積と等しい」ことから、①より、正方形ADEBの面積＝正方形BFGCの面積＋正方形ACHIの面積…④です。

②③④より、正方形ADEBの面積＝1＋$\frac{1}{4}$＝$\frac{5}{4}$です。

準備として、もう一問考えておきます。

問題２

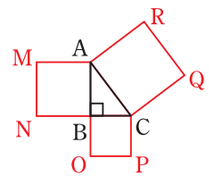
BAとBCの間の角が直角の直角三角形ABCと△DEFにおいて、AB＝DE、BC＝EFであり、△DEFの二辺DEとEFの上の２つの正方形の面積の和が、辺DFの上の正方形の面積と等しいとします。このとき、△ABCと△DEFがぴったり重なることを証明してみましょう。



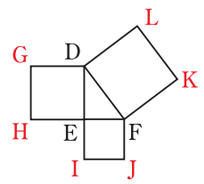
考え方 ピタゴラスの定理を使ってAC＝DFを証明できないか考えてみましょう。

証明 問題の設定より、AB＝DE…①、BC＝EF…②、BAとBCの間の角は直角…③です。

△ABCのそれぞれの辺の上にも正方形を考え、図のように、点G、H、I、J、K、L、M、N、O、P、Q、Rをとります。すると、問題の仮定から、正方形DFKLの面積＝正方形DGHEの面積＋正方形EIJFの面積…④です。



また、ピタゴラスの定理「直角三角形の直角をはさむ二辺の上の２つの正方形の面積の和が、直角の向かいの斜辺の上の正方形の面積と等しい」ことから、③より、正方形ACQRの面積＝正方形AMNBの面積＋正方形BOPCの面積…⑤です。



①より、正方形DGHEの面積＝正方形AMNBの面積…⑥、

②より、正方形EIJFの面積＝正方形BOPCの面積…⑦なので、

④⑤⑥⑦より、正方形DFKLの面積＝正方形ACQRの面積です。

よって、AC＝DF…⑧とわかります。

したがって「三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる（３つの角も互いに等しい）」ことから、①②⑧より、△ABCと△DEFはぴったり重なることが証明できました。

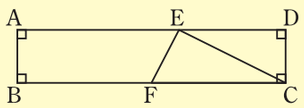
この **問題２** の証明から、△DEFのEDとEFの間の角は△ABCのBAとBCの間の直角とぴったり重なるとわかります。よって、△DEFにおいて、EDとEFの間の角は直角であることが証明できます。このことから、「三角形の二辺の上の２つの正方形の面積の和が、残る一辺の上の正方形の面積と等しいならば、はじめの二辺の間の角は直角である」という原理が証明されます。この原理を、『ピタゴラスの定理の逆定理』といいます。

たての長さが１、横の長さが５の長方形を調べてみよう

ここまでの準備の上で、今回は、たての長さが１、横の長さが５の長方形に対して成り立つ性質についてチャレンジしてもらいましょう。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

AB＝１、BC＝５の長方形ABCDにおいて、AD上に点EをDE＝２となるようにとり、BCの中点をFとする。このとき、ECとEFの間の角が直角であることを証明してみましょう。



考え方 直角を証明するにはピタゴラスの定理の逆定理が使えそうですね。そのためには、まずピタゴラスの定理を使った準備が必要なのですが、そこで **問題１** が……。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

〈根本原理〉

- 定規で、２点を通る直線が引ける。
- コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる（３つの角も互いに等しい）。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる（残りの辺と角も互いに等しい）。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 直角三角形の斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- ３点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、３点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図１）。
- ２直線において、錯角の位置の角が等しければ、その２直線は平行である。逆に、２直線が平行であれば、その２直線に対する錯角の位置の角は等しい（図２）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である（図３）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。

図１ 対頂角

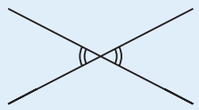


図２ 錯角

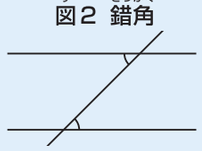
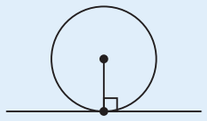


図３ 円の接線



〈図を描くときの注意〉

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。