

数学の世界をのぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

第26回

面積が5の正方形について調べてみよう

今回は、面積5の正方形について調べていきます。面積を数値で表す考え、長方形の面積がたて×よこ、三角形の面積が底辺×高さ÷2などは知っているものとします。

正方形を4つの合同な三角形に分ける

まず準備として、「長方形は平行四辺形である」ことを確認しておきましょう。長方形は4つの内角がすべて90度の四角形のこと、平行四辺形は2組の向かい合う辺がそれぞれ平行な四角形のことでした。

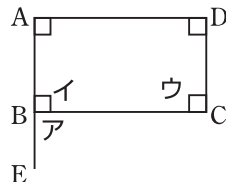
問題1

「長方形は平行四辺形である」ことを証明してみましょう。

考え方 平行を証明するには「2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である」という根本原理を使うので……。

証明 長方形の四頂点をA、B、C、Dとし、ABのBの方への延長線上に点Eをとります。

右の図のように角ア、イ、ウをおくと、「3点A、B、Eがこの順番で一直線上にあるならばBAとBEのなす角は180度である」ことから、角ア+角イ=180度…①です。



また、四角形ABCDは長方形より、角イ=90度…②なので、①②より、角ア=180度-90度=90度…③です。

四角形ABCDは長方形より、角ウ=90度…④なので、③④より、角ア=角ウ…⑤です。

「2直線において錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である」ことから、⑤よりABとDCは平行…⑥です。

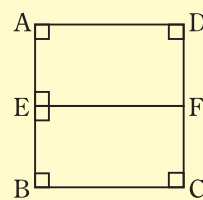
以上と同様に考えると、ADとBCは平行…⑦も証明できるので、⑥⑦より、2組の向かい合う辺がそれぞれ平行とわかります。

よって、長方形ABCDは平行四辺形であるとわかりました。

準備として、もう一問考えておきます。

問題2

正方形ABCDにおいて、辺AB上に点EをAE=EBとなるようにとり、辺CD上に点FをABとEFが垂直になるようにとります。このとき、△ADE、△FED、△EFB、△CBFが合同であることを証明してみましょう。



考え方 **問題1**の結果から「平行四辺形の向かい合う辺は等しい」という根本原理を使うことができます。すると、三角形の合同を説明する根本原理のうちの……。

証明 問題の設定から、ABCDは正方形…①、

AE=EB…②、ABとEFは垂直…③です。①より

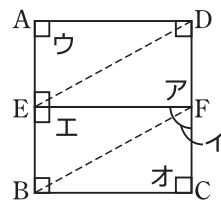
AB=BC=CD=DA…④です。図のように角ア、

イ、ウ、エ、オをおくと、「四角形の内角の和は

360度である」ことと①③から、角ア=360度

-90度×3=90度、角イ=360度-90度×3=90度となり、角ア

=角イ=90度…⑤です。



①③⑤より、四角形AEFDとEBCFはどちらも4つの内角がすべて90度とわかるので、AEFDとEBCFはどちらも長方形…⑥です。

⑥と**問題1**より、AEFDとEBCFはどちらも平行四辺形とわかり、「平行四辺形の向かい合う辺は等しい」ことから、AD=EF=BC…⑦、

AE=DF…⑧、EB=FC…⑨です。

よって、②⑧⑨から、AE=EB=FC=DF…⑩とわかります。

さらに、⑥より、角ア=角ウ=角イ=角オ(=90度)…⑪なので、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、

⑦⑩⑪より、△ADE、△FED、△EFB、△CBFはぴったり重なることがわかりました。

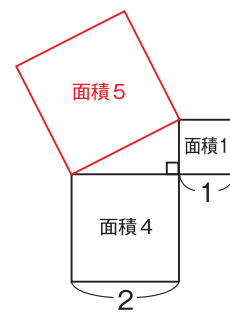
面積5の正方形を調べてみよう

いよいよ面積5の正方形について調べていきます。

以前の記事でもあつかったピタゴラスの定理「直角三角形の直角をはさむ二辺の上の2つの正方形の面積の和が、直角の向かいの斜辺の上の正方形の面積と等しい」を利用すると、一辺の長さが1で面積が

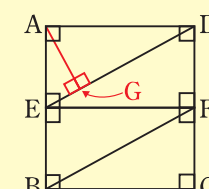
1×1=1の正方形と一辺の長さが2で面積が2×2=4の正方形を利用して、面積が5の正方形を図のように

に描くことができます。この面積5の正方形ABCDに対して成り立つ性質を今回のチャレンジ問題にします。がんばって考えてみてくださいね。



チャレンジ問題

面積5の正方形ABCDにおいて、**問題2**と同じ設定で点E、Fをとり、さらに、DE上に点GをAGとDEが垂直になるようにとるとき、AGの長さが1になることを証明してみましょう。



考え方 ピタゴラスの定理も利用して、面積と長さの関係を考えていくと……。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

〈根本原理〉

- ・定規で、2点を通る直線が引ける。
- ・コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- ・三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる(3つの角も互いに等しい)。
- ・二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる(残りの辺と角も互いに等しい)。
- ・一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- ・直角三角形の斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- ・二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- ・3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- ・対頂角は等しい(図1)。
- ・2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい(図2)。
- ・三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ・ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である(図3)。
- ・平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- ・定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

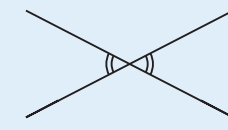


図1 対頂角

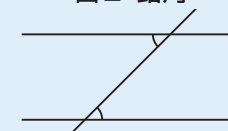


図2 錯角

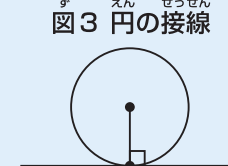


図3 円の接線

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。