企画・構成｜科学的教育グループ SEG®
バックナンバーは右記アドレスにて公開中！＞ http://www.seg.co.jp/

数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

第25回 面積3の正方形をコンパスと定規で描いてみよう

今回は、長さが1の線分が与えられているときに、面積が3の正方形をコンパスと定規を用いて描くことを考えます。面積を数値で表す考え方、長方形の面積がたて×よこ、三角形の面積が底辺×高さ÷2などは知っているものとします。

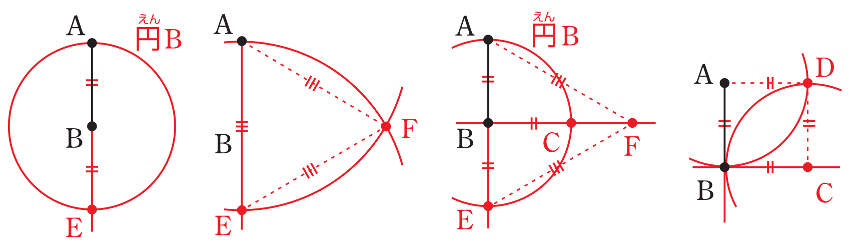
まずは、面積2の正方形を描いてみよう

正方形は、四辺の長さがすべて等しく、4つの内角がすべて直角の四角形のことです。まず、以前の記事で考えた「線分ABが与えられているとき、線分ABが一辺となるような正方形ABCDをコンパスと定規を用いて描く」方法を確認しておきます。

与えられた線分ABをBの方へ線分ABよりも長く延長し、点Bを中心とし半径ABの円Bを描き、ABのBの方への延長線との交点をEとします。次に、点Aを中心とし半径AEの円と点Eを中心とし半径AEの円を描き、それら2円の交点のうちの1つをFとします。そして、2点B、Fを通る直線を描き、円Bとの交点をCとします。

最後に、点Aを中心とし半径ABの円と点Cを中心とし半径BCの円を描き、それら2円の交点のうちBではない方をDとすると、四角形ABCDは、一辺がABの正方形になります。

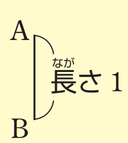
証明が気になる人は第9回（2016年9月15日付）の記事を読んでみてください。



このことを前提として、次の問題を考えてみましょう。

問題1

長さ1の線分ABが与えられているとき、面積2の正方形をコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。

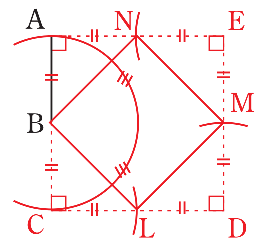


考え方 色々な描き方がありますが、面積4の正方形を半分にすると面積2の図形ができることを考えると……。

描き方 与えられた長さ1の線分ABをBの方へ線分ABよりも長く延長し、点Bを中心とし半径ABの円を描き、その円とABのBの方への延長線との交点をCとします。そして、線分ACが一辺となるような正方形ACDEを、上の本文で確認したように描きます。

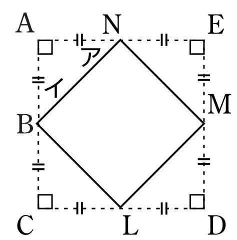
次に、点C、D、Eを中心とし半径AB（＝1）の円をそれぞれ描き、それらの円とCD、DE、EAとの交点をそれぞれL、M、Nとします。すると四角形BLMNが面積2の正方形になります。

証明 図の描き方から、CL=DM=EN=AB=1、ACDEは正方形よりCD=DE=EA=AC=2なので、AB=BC=CL=LD=DM=ME=EN=NA=1…①です。また、正方形ACDEの内角はどれも90度…②です。

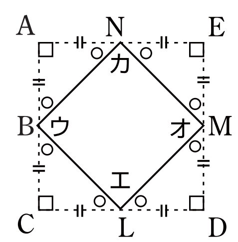


「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、①②より、△ABN、△CLB、△DML、△ENMはぴったり重なる…③とわかります。

次に、右の図のように、△ABNで角ア、イをおきます。①よりAB=AN、②よりABとANの間の角は90度なので、「二等辺三角形の底角は等しい」ことと「三角形の内角の和は180度」であることから、角ア＝角イ＝（180度－90度）÷2＝45度です。



③からぴったり重なる角を考えて、右の図のように45度の角を○と置き、さらに、角ウ、エ、オ、カをおきます。

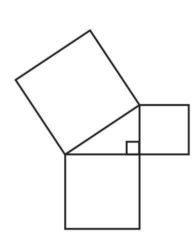


すると、「3点A、B、Cがこの順に一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度である」ことから、角ウ＝180度－○×2＝180度－45度×2＝90度であり、同様に考えて、角ウ、エ、オ、カはすべて90度…④です。また、③よりBL=LM=MN=NB…⑤なので、④⑤より、BLMNは正方形…⑥です。その面積は、1辺の長さがAC＝2の正方形ACDEの面積は2×2＝4から、③を考えて、△ABNの面積AB×AN÷2＝1×1÷2＝0.5を4つ分引いたものなので、正方形BLMNの面積は4－0.5×4＝4－2＝2とわかります。

以上から、面積2の正方形BLMNが描けたことがわかりました。

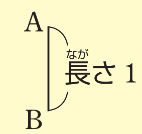
面積3の正方形を描いてみよう

では、以前の記事でもあつかったピタゴラスの定理『直角三角形の直角をはさむ二辺の上の2つの正方形の面積の和が、直角の向かいの斜辺の上の正方形の面積と等しい』を利用して、つぎの問題にチャレンジしてみましょう。がんばって考えてみてくださいね。



チャレンジ問題

長さ1の線分ABが与えられているとき、面積3の正方形をコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方 1+2=3を考えて、ピタゴラスの定理を用いると……。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

〈根本原理〉

- 定規で、2点を通る直線が引ける。
- コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる（3つの角も互いに等しい）。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる（残りの辺と角も互いに等しい）。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 直角三角形の斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図1）。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である（図3）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。

図1 対頂角

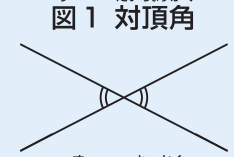


図2 錯角

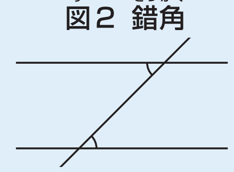
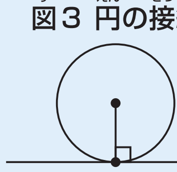


図3 円の接線



〈図を描くときの注意〉

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。