



# 数学の世界をのぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎

# コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

## 第24回 面積1の正方形3つから、面積3の正方形を作ろう

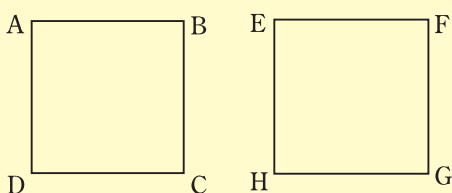
今回は、辺の長さが1で面積が1の正方形3つから、面積3の正方形を作れることを考えます。長方形や正方形の面積の値は、たての長さ×よこの長さで求まるのでしたね。

### まずは、面積2の正方形を作ってみよう

それでは、さっそく問題です。

#### 問題1

「辺の長さが1で面積が1の正方形2つをいくつかの図形に分けて並べかえることで、面積2の正方形を作ることができる」ことを証明してみましょう。

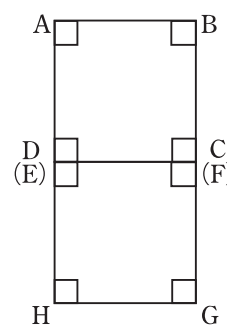


#### 考え方

対角線を引いて、正方形をぴったり重なる2つの直角二等辺三角形に分けると、その直角二等辺三角形1つ分の面積は正方形の面積1の半分になります。

#### 証明

辺の長さが1で面積が1の正方形ABCDと正方形EFGHを、点CとF、点DとEが重なるよう、右の図のように並べます。問題の前提より、四角形ABCDは辺の長さが1で面積が1の正方形①、四角形DCGHは辺の長さが1で面積が1の正方形②です。



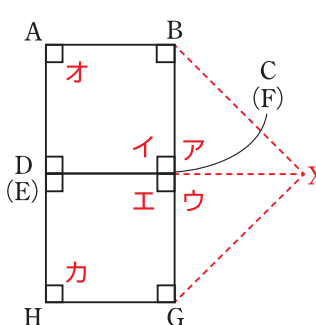
DCのCの方への延長線上に、点XをCX=CD (=1)③となるようにとると、①②③より、AB=AD=HD=HG=CB=CD=CG=CX (=1)④です。

角ア、イ、ウ、エ、オ、カを図のようにおきます。

3点D、C、Xはこの順に一直線上にあるので、角ア=180度-角イ、角ウ=180度-角エ⑤です。

①②⑤より、角ア=180度-90度=90度⑥、角ウ=180度-90度=90度⑦です。

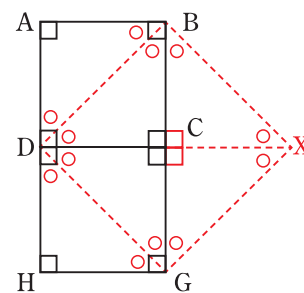
①②⑥⑦より、角ア=角イ=角ウ=角エ=角オ=角カ=90度⑧です。



④⑧より、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、△ABD、△HGD、△CBD、△CDG、△CGX、△CXBはぴったり重なる⑨とわかります。

ここで、④⑧より、△ABD、△HGD、△CBD、△CDG、△CGX、△CXBは直角二等辺三角形なので、「二等辺三角形の底角は等しい」ことと「三角形の内角の和は180度」から、これら6つの二等辺三角形の底角は、すべて(180度-90度)÷2=45度になります。

これらの45度の底角を、右の図のよう



に、○とおきます。

四角形BDGXにおいて、BDとBXのなす角は○+○=45度+45度=90度です。同様にして、DBとDGのなす角、GDとGXのなす角、XGとXBのなす角も○+○=90度なので、四角形BDGXの4つの内角はすべて90度⑩です。

また、⑨より、BD=DG=GX=XB⑪なので、⑩⑪より、四角形BDGXは正方形⑫です。

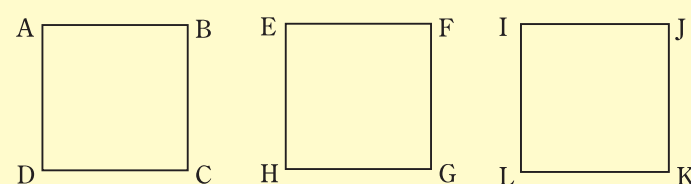
⑨より、特に、△ABDと△CXG、△HGDと△CXBはぴったり重なるので、「面積1の正方形ABCDと面積1の正方形DCGHを4つの三角形の△ABD、△HGD、△CBD、△CDGに分けて並べかえると、4つの三角形の△CBD、△CDG、△CGX、△CXBから作られる面積2の正方形BDGXになる」ことが証明できました。

### 面積3の正方形を作ってみよう

では、問題1の結果も利用して、つぎの問題にチャレンジしてみましょう。がんばって考えてみてくださいね。

#### チャレンジ問題

「辺の長さが1で面積が1の正方形3つをいくつかの図形に分けて並べかえることで、面積3の正方形を作ることができる」ことを証明してみましょう。



**考え方** 面積1の正方形と面積2の正方形をいくつかに分けて並べかえることで面積3の正方形が……。

### 証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

#### 根本原理

- ・ 定規で、2点を通る直線が引ける。
- ・ コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- ・ 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる(3つの角も互いに等しい)。
- ・ 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる(残りの辺と角も互いに等しい)。
- ・ 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- ・ 直角三角形の斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- ・ 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- ・ 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- ・ 対頂角は等しい(図1)。
- ・ 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい(図2)。
- ・ 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ・ ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である(図3)。
- ・ 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。

図1 対頂角

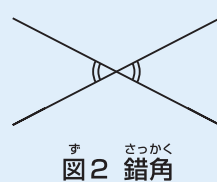


図2 錯角

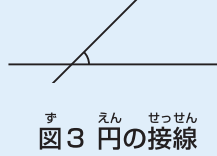


図3 円の接線



#### 図を描くときの注意

- ・ 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。