数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

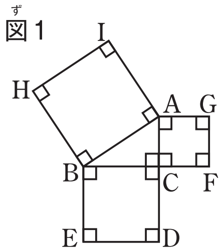
コンパスと定規で描ける図形の世界
……ユークリッド幾何の世界……

第23回 2つの正方形を5つに分けて、1つの正方形を作ろう

今回は、「2つの正方形を5つの図形に分けて並べ直すことで、1つの正方形を作る」ことの証明を考えてみることにします。

ピタゴラスの定理の1つの証明

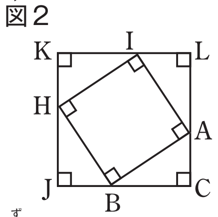
図1



ピタゴラスの定理は、「直角三角形の直角をはさむ二辺をそれぞれの一辺の長さとする2つの正方形の面積の和が、直角の向かいの斜辺を一辺の長さとする正方形の面積と等しい」という定理です。

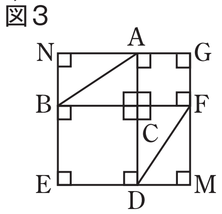
ここで図1のように点を表す記号をおくことにします。第19回（7月20日付）の記事では、「正方形ABHIに直角三角形ABCを4つ加えてできる正方形CJKL（図2）」が、「正方形BCDEと正方形ACFGに、直角三角形ABCを4つ加えてできる正方形EMGN（図3）」とぴったり重なることから、この定理を証明しました。

図2



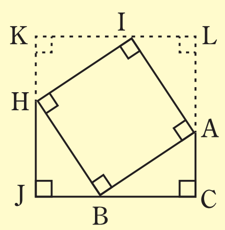
実は、今回の問題を解くカギが、この図の中に隠されています。直角三角形ABCを4つ加えなくても、2つ加えるだけで、ぴったり重なる図形を作ることができるのです。

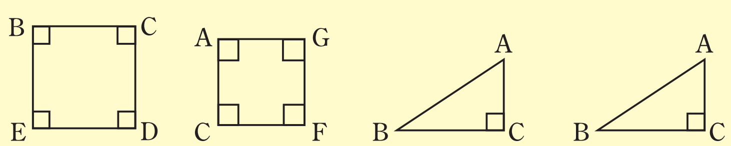
図3



問題1

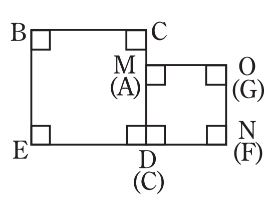
図1の状況のとき、図2の中の五角形ACJHIとぴったり重なる図形が、正方形BCDEと正方形ACFGに直角三角形ABCを2つ加えることで作れることを、図2の四角形KJCLが1辺の長さがAC+BCの正方形であることは前提にして証明してみましょう。

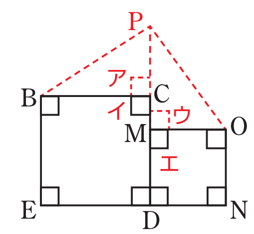




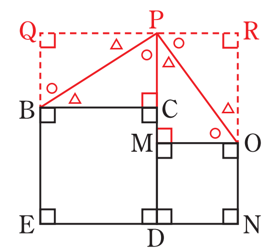
考え方 図3の中で図形をいろいろ移動させて考えてみましょう。

証明 正方形ACFGと正方形BCDEを点CとDが重なり、辺ACが辺CDと重なるよう、右の図のように並べ、点A、F、Gに対応する点をM、N、Oとします。すると、「正方形MDNOは一辺の長さがAC」…①であり、DEとDNのなす角は直角2つ分で180度なので、「3点E、D、Nは一直線上にある」…②とわかります。CDのCの方への延長線上に、点PをCP=AC…③となるようにとり、角ア、イ、ウ、エを図のようにおきます。4点D、M、C、Pはこの順に一直線上にあるので、角ア＝180度－角イ＝180度－90度＝90度…④、角ウ＝180度－角エ＝180度－90度＝90度…⑤です。問題の前提のBCDEは正方形と①③より、MP=MC+CP=MC+MD=CD=BC…⑥、MO=CA=CP…⑦なので、④⑤⑥⑦より、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、△PBCと△OPMと△ABCはぴったり重なる…⑧とわかります。





ここで、点Q、Rを、△BPQと△PORと△ABCがぴったり重なる…⑨ように、右の図のようにとります。⑧⑨において、直角以外のぴったり重なる角を○と△とおくと、三角形の内角の和は180度より、○+△+90度＝180度なので、○+△＝90度…⑩です。



よって、PQとPRのなす角＝2×(○+△)＝2×90度＝180度なので、「3点Q、P、Rは一直線上にある」…⑪とわかります。

⑩より、BEとBQのなす角＝○+△+90度＝90度+90度＝180度なので、「3点Q、B、Eは一直線上にある」…⑫、同様に考えて、ONとORのなす角＝180度なので、「3点N、O、Rは一直線上にある」…⑬とわかります。

②⑪⑫⑬と⑧⑨より、「正方形BCDEと正方形ACFGと直角三角形ABCを4つ並べて、1つの長方形QENRができた」…⑭とわかります。

この長方形は4辺それぞれの長さがAC+BCですべて等しいので、四角形QENRは一辺の長さがAC+BCの正方形であることがわかります。

この正方形QENRと図2の正方形KJCLは、どちらも一辺の長さがAC+BCの正方形でぴったり重なるので、それぞれから△ABCとぴったり重なる△BPQ、△POR、△HIK、△IALをとりのぞいた残りの五角形ACJHIと五角形ONEBPがぴったり重なるとわかりました。

以上で、五角形ACJHIとぴったり重なる図形が、正方形BCDEと正方形ACFGに△ABCを2つ付け加えることで作れることが証明できました。

2つの正方形を5つに分けて、1つの正方形を作る

では、**問題1**の結果をヒントに、つぎの問題にチャレンジしてみましょう。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

「2つの正方形を5つの図形に分けて並べ直すことで、1つの正方形を作ることができる」ことを証明してみましょう。

考え方 **問題1**の五角形ACJHIと五角形ONEBPをじっと見ていると……。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

〈根本原理〉

- 定規で、2点を通る直線が引ける。
- コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる(3つの角も互いに等しい)。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる（残りの辺と角も互いに等しい)。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 直角三角形の斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図1）。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である（図3）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。

図1 対頂角

図2 錯角

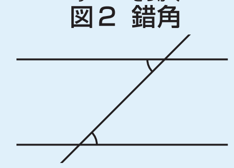
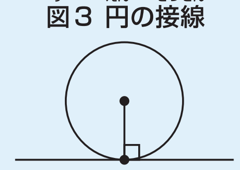


図3 円の接線



〈図を描くときの注意〉

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。