

数学の世界をぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界／ユークリッド幾何の世界

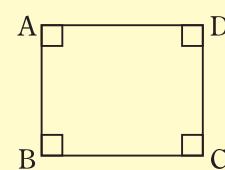
第22回 正方形を5つの同じ大きさの正方形に分解しよう

今回は、「1つの正方形をいくつかの図形に分けて並べ直すことで同じ大きさの5つの正方形を作る」ことの証明を考えてみることにします。

長方形の性質と正方形になるための条件

問題1

「 $AB=BC$ の長方形ABCDは正方形になる」ことを、三角形の合同を利用して証明してみましょう。



考え方 長方形は、すべての内角が直角の四角形のことと、正方形はすべての内角が直角で4辺の長さがすべて等しい四角形のことでした。ですから、証明すべきことは、4辺の長さがすべて等しいことです。三角形の合同をどう利用するかを考えてみると……。

証明 仮定より、ABCDは長方形…①、 $AB=BC$ …②です。ABのBの方への延長線上に点Eを取り、図のように、角Aから力をとります。「3点A、B、Eがこの順番で一直線上にある」ので、角A=180度-角E…③、①より、角E=90度…④、③④より、角E=90度(=180度-90度)…⑤、①⑤より、CDとCBの間の角=角E(=90度)。よって、「錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である」ので、AEとDCは平行です。よって、「2直線が平行であれば、錯角の位置の角は等しい」ので、角A=角E…⑥です。

同様にして、ADとBCが平行であることが証明でき、角A=角C…⑦が証明できます。

$\triangle ABC$ と $\triangle CDA$ において、⑥⑦と $AC=CA$ より、「一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、 $\triangle ABC$ と $\triangle CDA$ はぴったり重なります。

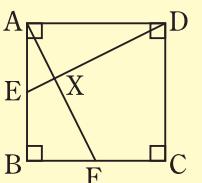
よって、 $AB=CD$ 、 $BC=DA$ …⑧です。
①②⑧より、四角形ABCDは4辺の長さがすべて等しい長方形なので、ABCDが正方形であることが証明できました。

合同の対応角を利用して垂直を示そう

次の問題に出てくる垂直がチャレンジ問題の鍵になります。

問題2

正方形ABCDの辺AB、BCの中点をそれぞれE、Fとし、AFとDEの交点をXとするとき、 XD と XF の間の角が90度であることを、三角形の合同を利用して証明してみましょう。



考え方 どの三角形とどの三角形が合同になるかを考えてみましょう。

証明 図のように角Aから力をとります。
 $\triangle ABF$ と $\triangle DAE$ において、ABCDは正方形より、 $AB=DA$ …①、 $AB=BC$ …②、 BA と BF の間の角= AD と AE の間の角=90度…③です。

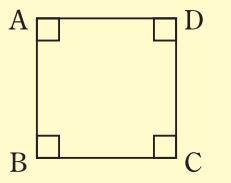
「E、FはAB、BCの中点」と②より、 $AE=BF$ …④。
①③④より、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、 $\triangle ABF$ と $\triangle DAE$ はぴったり重なります。よって、角A=角F…⑤です。
③より、角A+角F=90度…⑥なので、⑤⑥より、角A+角F=90度…⑦です。
「三角形の内角の和は180度」より、角A=180度-(角F+角A)…⑧。
⑦⑧より、角A=180度-90度=90度…⑨です。
「3点A、X、Fがこの順番で一直線上にある」ことから、角A=180度-角F…⑩なので、⑨⑩より、角A=180度-90度=90度です。よって、 XD と XF の間の角=角A=90度です。

1つの正方形を5つの同じ大きさの正方形に分ける

では、**問題2**の結果をヒントに、「正方形をいくつかの図形に分けて並べ直すことで5つの同じ大きさの正方形を作る」ことにチャレンジしてみましょう。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

「正方形ABCDをいくつかの図形に分けて並べ直すことで5つの同じ大きさの正方形を作ることができる」ということを、三角形の合同を利用して証明してみましょう。



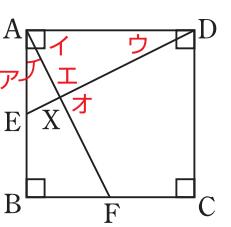
考え方 正方形の辺の中点をとり、**問題1**、**問題2**の結果を利用することを考えてみましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

（根本原理）

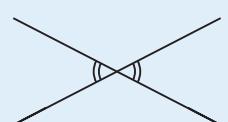
- ・定規で、2点を通る直線が引ける。
- ・コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- ・三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる(3つの角も互いに等しい)。
- ・二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる(残りの辺と角も互いに等しい)。



- ・一边とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- ・直角三角形の斜辺と他の一边が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- ・二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。

- ・3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。

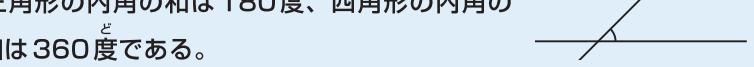
図1 対頂角



- ・対頂角は等しい(図1)。

- ・2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい(図2)。

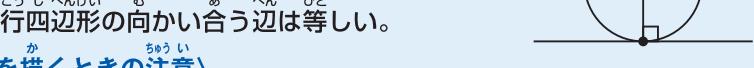
図2 錯角



- ・三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。

- ・ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である(図3)。

図3 円の接線



- ・平行四辺形の向かい合う辺は等しい。

（図を描くときの注意）

・定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。