



数学の世界をのぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

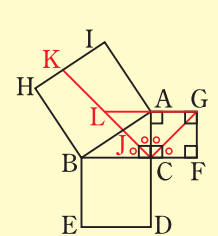
……ユークリッド幾何の世界……

第21回

ピタゴラスの定理 その3

問題2

CAとCBの間の角が直角の△ABCにおいて、直角をはさむ二辺の上に正方形BCDEと正方形ACFGがあり、直角の向かいの斜辺の上に正方形ABHIがある。CAとCBの間の角の二等分線とAB、IHとの交点をそれぞれJ、Kとし、AGのAの方への延長線とCKとの交点をLとすると、△ACLと△ACGがぴったり重なることを証明してみましょう。



考え方

問題1の結果を利用すれば……。

証明

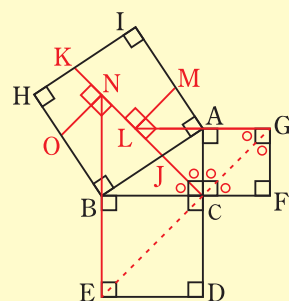
CLはCAとCBの間の角の二等分線なので、CAとCLの間の角=CBとCLの間の角…①です。また、CAとCBの間の角が直角なので、CAとCLの間の角+CBとCLの間の角=CAとCBの間の角=90度…②です。①②より、CAとCLの間の角=90度÷2=45度…③です。ACFGは正方形なので、問題1よりCAとCGの間の角=45度…④です。③④より、CAとCLの間の角=CAとCGの間の角…⑤です。3点G、A、Lがこの順番で一直線上にあるので、AGとALのなす角=180度…⑥です。ACFGは正方形なので、ACとAGの間の角=90度…⑦です。⑥⑦より、ACとALの間の角=ACとAGの間の角(=180度-90度=90度)…⑧です。△ACLと△ACGにおいて、⑤⑧とACは共通より、「一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、△ACLと△ACGはぴったり重なります。

正方形をぴったり重なる三角形たちに分割しよう

では、問題1と問題2の結果を利用して、ピタゴラスの定理を証明してみましょう。今回の方針は、正方形をぴったり重なる三角形たちに分割することです。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

ピタゴラスの定理「CAとCBの間の角が直角の△ABCの直角をはさむ二辺の上の正方形BCDEと正方形ACFGの面積の和が、斜辺の上の正方形ABHIの面積と等しい」を証明するために、以下のように補助線を引きます。CAとCBの間の角の二等分線とAB、IHとの交点をそれぞれJ、Kとします。AGのAの方への延長線とCKとの交点をLとし、Lを通りCKと垂直な線とAIとの交点をMとします。BEのBの方への延長線とCKとの交点をNとし、Nを通りCKと垂直な線とBHとの交点をOとします。この補助線を利用して、ピタゴラスの定理を証明してみましょう。



考え方

正方形を分割した三角形たちがぴったり重なることをきちんと証明していきましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

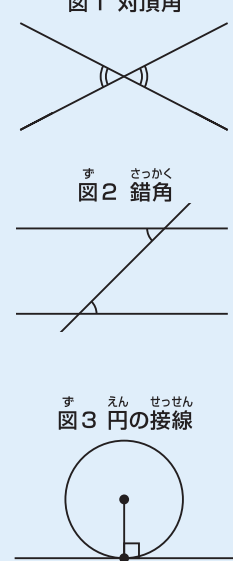
コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするとき使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

根本原理

- ・定規で、2点を通る直線が引ける。
- ・コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- ・三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる(3つの角も互いに等しい)。
- ・二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる(残りの辺と角も互いに等しい)。
- ・一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- ・直角三角形の斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- ・二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- ・3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- ・対頂角は等しい(図1)。
- ・2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい(図2)。
- ・三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ・ある円の円周上の点を通る直線は、その点を中心とする半径と垂直であるならば接線である(図3)。
- ・平行四辺形の向かい合う辺は等しい。

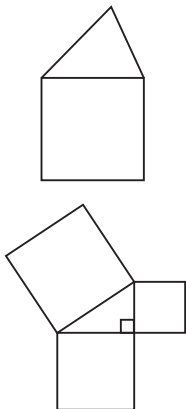
図を描くときの注意

- ・定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。



チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。

ピタゴラスの定理の証明の3回目です。まず、言葉の確認をしておきます。「三角形の辺の上の正方形」とは、右の図のように、「三角形の辺の一つの辺とする三角形の外側にくっついている正方形」のこととします。



このとき、ピタゴラスの定理とは、「直角三角形の直角をはさむ二辺の上の2つの正方形の面積の和が、直角の向かいの斜辺の上の正方形の面積と等しい」という定理です。

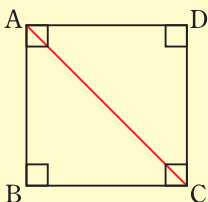
今回は、この定理を、正方形を三角形たちに分割して並べかえることで、証明していくことにします。

正方形の対角線は、1つの内角を45度ずつに分ける

ピタゴラスの定理を証明する準備として、次の問題を考えてみてください。

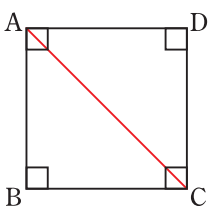
問題1

正方形ABCDの対角線ACにより、ABとADの間の角が45度ずつに分けられる、すなわち、ABとACの間の角=ADとACの間の角=45度であることを証明してみましょう。



△ABCと△ADCがぴったり重なることを証明し、そのことを利用すればよいですね。

△ABCと△ADCにおいて、ABCDは正方形なので、BAとBCの間の角=DAとDCの間の角=90度…①、AB=AD…②、BC=DC…③です。



①②③より、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、△ABCと△ADCはぴったり重なります。よって、ABとACの間の角=ADとACの間の角…④とわかります。

また、ABCDは正方形なので、ABとACの間の角+ADとACの間の角=ABとADの間の角=90度…⑤です。④⑤より、ABとACの間の角=ADとACの間の角=90度÷2=45度です。

ピタゴラスの定理の証明の鍵

次の問題に出てくる直角二等辺三角形がピタゴラスの定理の証明の鍵になります。