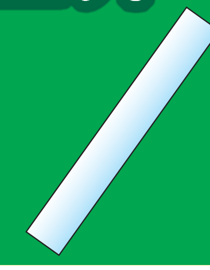
数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

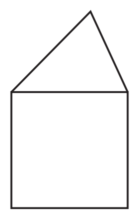
コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

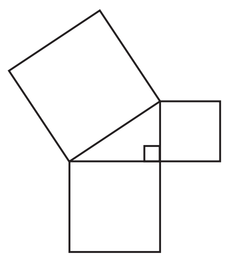


第19回 ピタゴラスの定理 その1

今回は、ピタゴラスの定理について考えていきます。まず、言葉の確認をしておきます。「三角形の辺の上の正方形」とは、右の図のように、「三角形の辺を一つの辺とする三角形の外側にくっついている正方形」のこととします。



このとき、ピタゴラスの定理とは、「直角三角形の直角をはさむ二辺の上の２つの正方形の面積の和が、直角の向かいの斜辺の上の正方形の面積と等しい」という定理です。



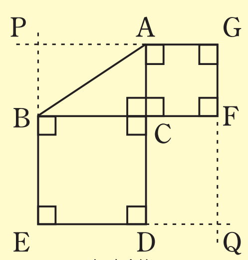
今回は、この定理の証明について考えていきましょう。

まずは大きな正方形を作ってみる

ピタゴラスの定理を証明する準備として、次の問題を考えてみてください。

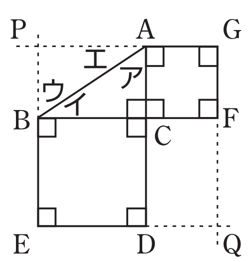
問題１

CAとCBの間の角が直角の△ABCと辺BCの上の正方形BCDE、辺ACの上の正方形ACFGが与えられているとき、AGのAの方への延長線とBEのBの方への延長線との交点をP、EDのDの方への延長線とGFのFの方への延長線との交点をQとする。このとき、四角形PEQGは一辺の長さがAC+BCの正方形であることを証明してみましょう。



考え方 正方形は、４つの辺の長さがすべて等しく、４つの内角がすべて直角で等しい四角形のことです。ですから、四角形PEQGで、そのことを示せばよいわけですが、そのためには……。

証明 まず、問題の前提条件から、CAとCDのなす角が90度+90度=180度なので、３点A、C、Dはこの順番で一直線上にあります。同様に考えて、３点B、C、Fも一直線上にあります。△ABCにおいて、CAとCBの間の角は直角であり、正方形BCDEにおいて、BCとBEの間の角は直角なので、CAとCBの間の角とBCとBEの間の角は等しくなります。



この２つの角は錯角の位置にあるので、「２直線において、錯角の位置の角が等しければ、その２直線は平行である」ことから、３点A、C、Dを通る直線と３点P、B、Eを通る直線は平行…①です。

同様に考えて、３点P、A、Gを通る直線と３点B、C、Fを通る直線は平行…②です。

図のように角ア、イ、ウ、エをおきます。「２直線が平行であれば、その２直線に対する錯角の位置の角は等しい」ことから、①より、角ア＝角ウ…③であり、②より、角イ＝角エ…④です。

すると、△ABCと△BAPにおいて、AB=BAと③④より、「一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、△ABCと△BAPはぴったり重なります。

よって、対応する角や辺もぴったり重なるため、PBとPAの間の角は、CAとCBの間の角と等しく、PBとPAの間の角は直角…⑤、PA=BC…⑥、PB=AC…⑦です。

CDとCFの間の角を考えると、点Cのまわりの360度から、３つの直角を引いたものなので、CDとCFの間の角は直角になります。よって、あとは同様に考えて、△DFQと△FDCはぴったり重なることが証明できるので、QDとQFの間の角は直角…⑧、QF=CD…⑨、QD=CF…⑩です。

また、BCDEは正方形なので、

EBとEDの間の角は直角…⑪、BE=ED=DC=BC…⑫です。

ACFGは正方形なので、

GAとGFの間の角は直角…⑬、AG=GF=FC=AC…⑭です。

四角形PEQGにおいて、

⑤⑧⑪⑬より、４つの内角がすべて直角…⑮です。

⑥⑭より PG=PA+AG=BC+AC、⑦⑫より PE=PB+BE=AC+BC、

⑨⑫⑭より GQ=GF+FQ=AC+BC、⑩⑫⑭より EQ=ED+DQ=BC+AC

なので、４つの辺の長さがすべてAC+BCと等しい…⑯とわかります。

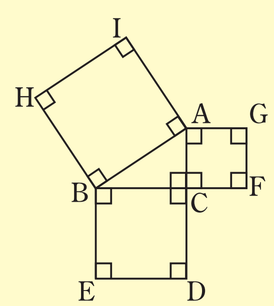
よって、⑮⑯より、四角形PEQGは一辺の長さがAC+BCの正方形であることが証明できました。

ピタゴラスの定理を証明しよう

では、今回のチャレンジ問題です。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

CAとCBの間の角が直角である△ABCの直角をはさむ二辺の上の正方形BCDEと正方形ACFGの面積の和が、直角の向かいの斜辺の上の正方形ABHIの面積と等しいことを、面積を数値で表す考え方を使わずに、証明してみましょう。



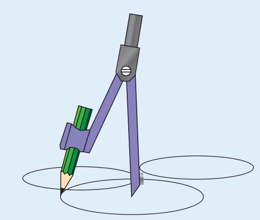
考え方 **問題１** の結果をどう利用すればよいかを考えてみましょう。証明では、面積を数値で表す考え方、「三角形の面積が底辺×高さ÷２」や「長方形の面積が底辺×高さ」は使ってはいけないことに注意しましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

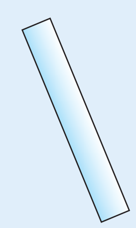
〈根本原理〉

- 定規で、２点を通る直線が引ける。
- コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる（３つの角も互いに等しい）。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる（残りの辺と角も互いに等しい）。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 直角三角形の斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- ３点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、３点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい。
- ２直線において、錯角の位置の角が等しければ、その２直線は平行である。逆に、２直線が平行であれば、その２直線に対する錯角の位置の角は等しい。
- 三角形の内角の和は180度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。



〈図を描くときの注意〉

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。



チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。