

数学の世界をのぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

第18回 与えられた平行四辺形と面積の等しい平行四辺形を描こう

今回は、与えられた平行四辺形と面積の等しい別の平行四辺形を、コンパスと定規を用いて描くことを考えていきます。

平行四辺形の面積は対角線で二等分される

前回の記事で確認しましたが、平行四辺形の面積は対角線で二等分されるのです。

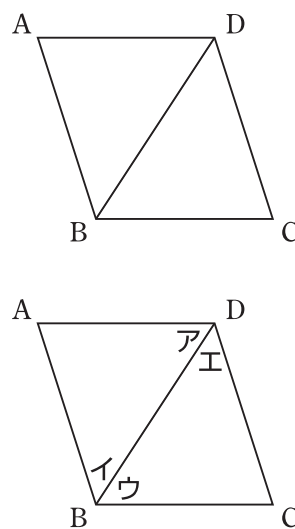
平行四辺形ABCDを対角線BDで2つの三角形に分けます。すると、△ABDと△CDBの面積が等しいことが、面積を数値で表す考え方を使わずに、2つの三角形がぴったり重なることを利用して証明できます。

右の図のように、角ア、イ、ウ、エをおくと、辺ADとBCは平行なので、「2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい」ことから、角ア=角ウ…①です。

同様に、辺ABとCDは平行なので、「2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい」ことから、角イ=角エ…②です。

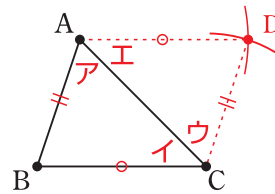
BD=DBと①②より、「一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、△ABDと△CDBはぴったり重なります。

よって、△ABDと△CDBの面積が等しいことが証明できました。今回は、最後のチャレンジ問題で、この「平行四辺形を対角線で分けてできる2つの三角形の面積は等しい」という性質を利用することになります。



考え方 平行四辺形ABCDを描くのですから、点Aを通り辺BCと平行な直線と、点Cを通り辺ABと平行な直線が描ければよいわけですが、△ABCが与えられているので、この△ABCとぴったり重なる三角形が利用できないかを考えてみると……。

描き方 点Aを中心とし半径BCの円と、点Cを中心とし半径ABの円を描き、その2円の交点のうち、A、Cを通る直線に対して点Bと反対側にある点をDとします。そして、2点A、Dを直線で結び、2点C、Dも直線で結べば、平行四辺形ABCDが描けます。



証明 図の描き方から、AB=CD、AC=CA、BC=DAなので、「三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、△ABCと△CDAはぴったり重なります。

よって、図のように角ア、イ、ウ、エをおくと、対応する角もぴったり重なるため、角ア=角ウ…①、角イ=角エ…②です。

角アと角ウ、角イと角エはそれぞれ錯角の位置にあるので、「2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である」ことから、①より、2点A、Bを通る直線と2点C、Dを通る直線は平行であり、②より、2点A、Dを通る直線と2点B、Cを通る直線は平行です。

よって、向かい合う2組の辺がそれぞれ平行なので、四角形ABCDは平行四辺形とわかります。

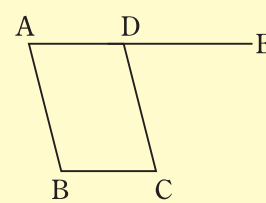
これで、確かに平行四辺形ABCDが描けたことが証明できました。

与えられた平行四辺形と面積の等しい平行四辺形

では、今回のチャレンジ問題です。頑張ってくださいね。

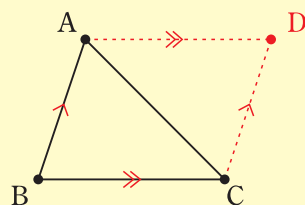
チャレンジ問題

平行四辺形ABCDと、辺ADのDの方への延長線上の点Eが、図のように与えられています。このとき、平行四辺形ABCDと面積の等しい平行四辺形DEFGを、点D、E、F、Gがこの順番に平行四辺形の4頂点になり、点Gが辺CDのDの方への延長線上にあるように、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを、面積を数値で表す考え方を使わずに、証明してみましょう。



問題1

△ABCが与えられているとき、平行四辺形ABCDを、点A、B、C、Dがこの順番に平行四辺形の4頂点になるように、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



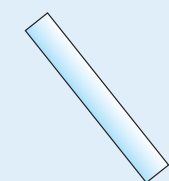
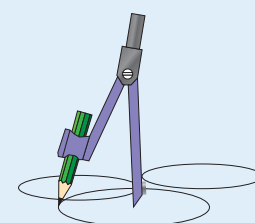
考え方 まず、「平行四辺形を対角線で分けてできる2つの三角形の面積は等しい」という性質と、**問題1**の結果をどう利用すれば、平行四辺形DEFGが描けるかを考えてみましょう。証明では、面積を数値で表す考え方、「三角形の面積が底辺×高さ÷2」や「長方形の面積が底辺×高さ」は使ってはいけないことに注意しましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするとき使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

根本原理

- ・ 定規で、2点を通る直線が引ける。
 - ・ コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
 - ・ 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる (3つの角も互いに等しい)。
 - ・ 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる (残りの辺と角も互いに等しい)。
 - ・ 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
 - ・ 直角三角形の斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
 - ・ 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
 - ・ 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
 - ・ 対頂角は等しい。
 - ・ 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい。
 - ・ 三角形の内角の和は180度である。
 - ・ ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である。
 - ・ 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 図を描くときの注意**
- ・ 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。



チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。