

数学の世界をのぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

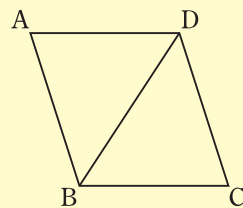
第17回 三角形の面積は平行四辺形の面積の半分

今回は、三角形の面積と平行四辺形の面積の関係が2つの三角形がぴったり重なることを利用して考えていきます（平行四辺形は、向かい合う2組の辺がそれぞれ平行な四角形です）。

平行四辺形の面積は対角線で二等分される

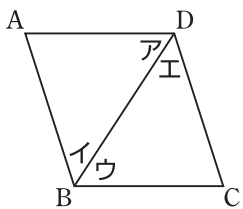
問題1

平行四辺形ABCDを対角線BDで2つの三角形に分けると、△ABDと△CDBの面積が等しいことを、面積を数値で表す考え方をせずに、証明してみましょう。



考え方 「2つのぴったり重なる三角形の面積は同じである」ということを利用して証明してみましょう。

証明 図のように、角ア、イ、ウ、エをおきます。すると、辺ADとBCは平行なので、「2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい」ことから、角ア=角ウ…①です。



同様に、辺ABとCDは平行なので、「2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい」ことから、角イ=角エ…②です。

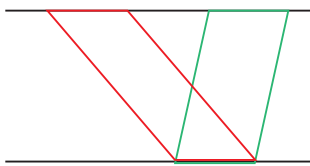
BD=DBと①②より、「一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、△ABDと△CDBはぴったり重なります。

よって、△ABDと△CDBの面積が等しいことが証明できました。

※「平行四辺形の向かい合う辺は等しい」という性質を利用して、「3辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから証明することもできます。

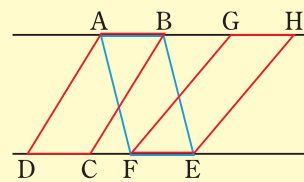
平行四辺形の性質

前回の記事のチャレンジ問題で、「2つの平行四辺形が共通の底辺をもち、その底辺の向かい側の辺が同一直線上にあるならば、2つの平行四辺形の面積は等しい」ということを、面積を数値で表す考え方をせずに証明しました（証明などを詳しく知りたい方は、第16回（4月20日付）の記事を読んでみてください）。このことを使って次の問題を考えてみましょう。



問題2

「2つの平行四辺形ABCDとEFGHにおいて、CD=EFが成り立っていて、4点A、B、G、Hは同じ直線上にあり、4点D、C、F、Eも別の同じ直線上にあるとき、平行四辺形ABCDとEFGHの面積は等しい」ことを、「2つの平行四辺形が共通の底辺をもち、その底辺の向かい側の辺が同一直線上にあるならば、2つの平行四辺形の面積は等しい」ことを利用して、面積を数値で表す考え方をせずに、証明してみましょう。



考え方

四角形ABEFが平行四辺形であるかどうかは証明されていないことに注意しましょう。

証明

まず、問題の前提を整理すると、CD=EF…①、四角形ABCDは平行四辺形…②、四角形EFGHは平行四辺形…③、4点A、B、G、Hは同一直線上にある…④、4点D、C、F、Eは同一直線上にある…⑤です。「平行四辺形の向かい合う辺は等しい」ので、②より、AB=CD…⑥であり、①⑥より、AB=EF…⑦です。

また、②よりABとCDは平行なので、⑤より、ABとEFは平行…⑧です。

△ABFと△EFBにおいて、図のように角ア、イ、ウ、エをおきます。「2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい」ので、⑧より、角ア=角ウ…⑨です。

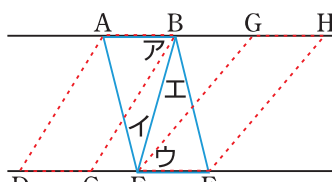
BF=FBと⑦⑨より、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、△ABFと△EFBはぴったり重なります。よって、角イと角エもぴったり重なるので、角イ=角エ…⑩です。

「2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である」ので、⑩より、AFとBEは平行…⑪です。

よって、⑧⑪より、四角形ABEFは平行四辺形…⑫です。

「2つの平行四辺形が共通の底辺をもち、その底辺の向かい側の辺が同一直線上にあるならば、2つの平行四辺形の面積は等しい」ので、②⑤⑫より、平行四辺形ABCDとABEFの面積は等しい…⑬

③④⑫より、平行四辺形ABEFとEFGHの面積は等しい…⑭です。よって、⑬⑭より、平行四辺形ABCDとEFGHの面積は等しいことがわかりました。

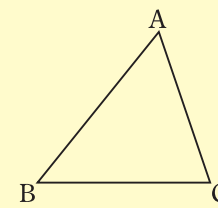


三角形の面積は平行四辺形の面積の半分

では、今回のチャレンジ問題です。頑張って考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

△ABCが図のように与えられています。辺BC上に点Dを、△ABDと△ACDの面積が等しくなるように、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを、面積を数値で表す考え方をせずに、証明してみましょう。



考え方

証明には、面積を数値で表す考え方を、「三角形の面積が底辺×高さ÷2」や「長方形の面積が底辺×高さ」は使っちゃいけません。

問題1

問題2

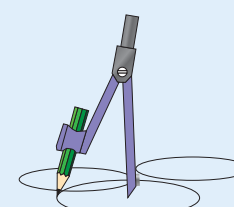
問題1、問題2の結果をどう利用するかを考えてみましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするとき使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

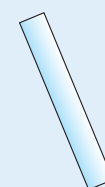
根本原理

- ・定規で、2点を通る直線が引ける。
- ・コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- ・三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる（3つの角も互いに等しい）。
- ・二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる（残りの辺と角も互いに等しい）。
- ・一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- ・直角三角形の斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- ・二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- ・3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- ・対頂角は等しい。
- ・2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい。
- ・三角形の内角の和は180度である。
- ・ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である。
- ・平行四辺形の向かい合う辺は等しい。



図を描くときの注意

- ・定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。



チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。