

数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

第16回

面積と合同

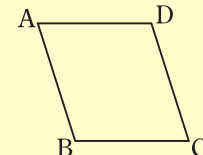
今回は、2000年以上昔の古代ギリシャ時代に、ユークリッドが『原論』という書物で、面積をどうあつかっていたかを見ていくことにします。ユークリッドは、平行線の性質や平行四辺形の性質を確認した後に、「2つの三角形がぴったり重なれば、それら2つの三角形の面積は等しい」ということを利用して、面積について議論をしているのです。

※ 2つの三角形がぴったり重なることを、2つの三角形が合同であると言います。

証明してみましょう。

問題2

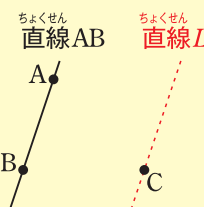
平行四辺形ABCDの向かい合う辺の長さが等しいことを証明してみましょう。



まずは、平行線を描いてみよう

問題1

2点A、Bを通る直線ABと点Cが与えられたとき、点Cを通り直線ABと平行な直線Lをコンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。

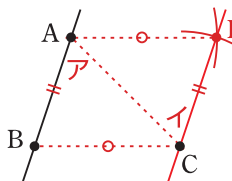


考え方

「2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である」という根本原理を考えると、錯角の位置が等しくなるように2本の直線が描ければ平行線が描けるとわかります。

描き方

点Aを中心とする半径BCの円と、点Cを中心とする半径ABの円を描き、その2円の交点のうち2点A、Cを通る直線ACに対してBと反対側にある点Dとします。そして、2点C、Dを通る直線を描けば、その直線がABと平行な直線Lになります。



証明

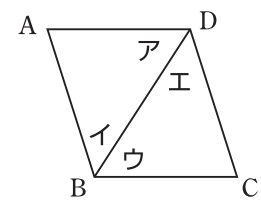
図の描き方から、 $AB=CD$ 、 $AC=CA$ 、 $BC=DA$ なので、「三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、 $\triangle ABC$ と $\triangle CDA$ はぴったり重なります。三角形がぴったり重なるので、図の対応する角Aと角イもぴったり重なるため等しくなります。よって、錯角の位置の角Aと角イが等しくなり、「2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である」ことから、直線ABと2点C、Dを通る直線Lは平行です。(同様に考えると、B、Cを通る直線とA、Dを通る直線も平行なので、四角形ABCDは平行四辺形とわかります。平行四辺形は、向かい合う2組の辺がそれぞれ平行な四角形のことでした。)

平行四辺形の性質

ここでは、平行四辺形の性質を、三角形がぴったり重なることを利用して

証明

図のように、角A、イ、ウ、エをおきます。すると、辺ADとBCは平行なので、「2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい」ことから、角A=角ウ…①です。同様に、辺ABとCDは平行なので、「2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい」ことから、角イ=角エ…②です。BD=DBと①②より、「一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、 $\triangle ABD$ と $\triangle CDB$ はぴったり重なります。よって、辺ABと辺CD、辺ADと辺CBもぴったり重なることから、平行四辺形ABCDの向かい合う辺の長さが等しいことが証明できました。

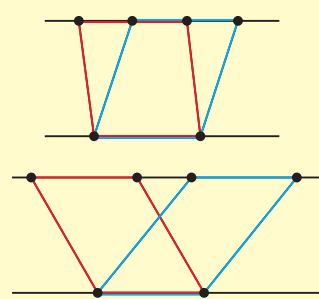


ぴったり重なる三角形の面積は当然等しい

この記事の冒頭でも書きましたが、ユークリッドの『原論』では、図形の面積が同じということ、2つのぴったり重なる(合同な)三角形の面積は同じである」ということを基本にして考えていました。現在では、「長方形の面積は底辺×高さである」ことを基本にして面積を考えていきますが、ユークリッドの時代には面積を数値で表すという考え方がまだなかったわけです。最後に、ユークリッドの『原論』にも登場する合同を利用して面積を考える問題をチャレンジ問題にしておきます。頑張ってくださいね。

チャレンジ問題

2つの平行四辺形が共通の底辺を持ち、その底辺の向かい側の辺が、同一直線上にあるならば、それら2つの平行四辺形の面積は等しいことを、面積を数値で表す考え方をせずに、証明してみましょう。



考え方

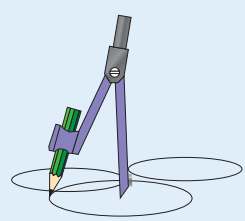
面積を数値で表す考え方、「三角形の面積は底辺×高さ÷2」や「長方形の面積は底辺×高さ」は使ってはいけません。問題2の結果や、三角形がぴったり重なることをどう利用するかを考えてみましょう。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

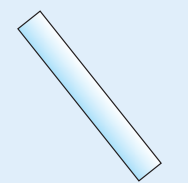
(根本原理)

- ・ 定規で、2点を通る直線が引ける。
- ・ コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- ・ 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる(3つの角も互いに等しい)。
- ・ 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる(残りの辺と角も互いに等しい)。
- ・ 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- ・ 直角三角形の斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- ・ 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- ・ 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- ・ 対頂角は等しい。
- ・ 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい。
- ・ 三角形の内角の和は180度である。
- ・ ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である。



(図を描くときの注意)

- ・ 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。



チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。