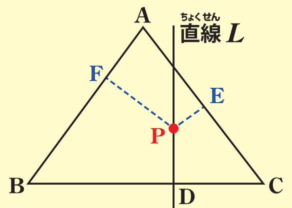
チャレンジ問題（解答・解説）

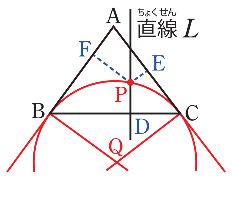
「数学の世界をのぞいてみよう!」の本コーナーは、7面をご覧ください。

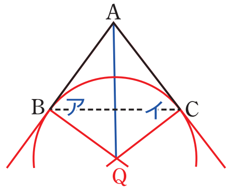
企画・構成｜科学的教育グループ SEG

AB＝ACの二等辺三角形ABCと辺BC上の点Dを通りBCと垂直な直線Lが与えられています。直線L上で三角形の内部の点PからCA、ABに下ろした垂線の足をE、Fとするとき、PD×PD＝PE×PFとなるような点Pを定規とコンパスを用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



描き方 本文の記事のように、点Bを通りABと垂直な直線と点Cを通りACと垂直な直線を描き、それらの交点をQとします。点Qを中心とし半径BQの円Qを描き、円Qと△ABCの内部の直線Lとの交点Pをとると、その点Pが求める点になっています。





証明 図のように、角をア、イとおきます。問題の仮定より、AB＝AC…①です。図の描き方から、角ア＝角イ＝90度…②です。「斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる」ことから、①②とAQは共通より、△ABQと△ACQはぴったり重なります。よって、BQ＝CQ…③です。③より、円Qは、点Cも通ることがわかります。「ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である」ことから、②より、ABとACは円Qの接線である…④ことがわかります。次に、問題の仮定と図の描き方から、FBとFPのなす角、DBとDPのなす角、ECとEPのなす角、DCとDPのなす角はすべて90度なので、FBとFPのなす角＋DBとDPのなす角＝180度、ECとEPのなす角＋DCとDPのなす角＝180度であり、「四角形の向かい合う2つの内角の和が180度のとき、4頂点を通る円が描ける」ことから、4点B、D、P、Fを通る円が描け、4点C、D、P、Eを通る円が描けるとわかります。

図のように、角をウからクとおきます。**問題1**から、弧DPの円周角なので、角オ＝角キ…⑤、弧PFの円周角なので、角カ＝角ク…⑥です。**問題2**から、④より、角ク＝角キ…⑦です。⑤⑥⑦より、角オ＝角カ…⑧です。同様にして、角エ＝角ウ…⑨です。△PDEと△PFDにおいて、「二角が互いに等しい三角形は相似である」ことから、⑧⑨より、△PDEと△PFDは相似です。よって、対応する辺の比が等しいので、PD：PE＝PF：PDです。したがって、PD×PD＝PE×PFとわかり、図が正しく描けていることが証明できました。