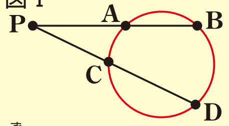
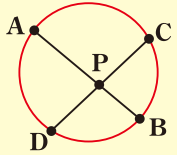
PA×PB＝PC×PDとなるような5点A、B、C、D、Pが、P、A、BとP、C、Dがそれぞれ一直線上にあるように、右の図のように与えられています。このとき、4点A、B、C、Dを通る円が描けることを証明してみましょう。

図Ⅰ



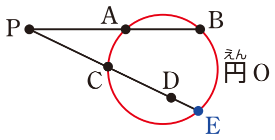
図Ⅱ



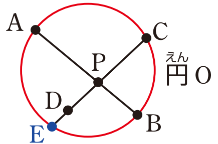
証明

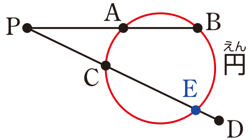
問題の仮定より、PA × PB ＝ PC × PD…①です。

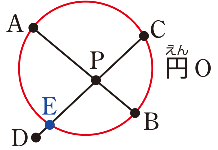
図Ⅰ



図Ⅱ







本文の記事のように、３点 A、B、C を通る円 O を描きます。図Ⅰ、図Ⅱ、どちらの場合でも、円 O が点 D を通らないと仮定して、矛盾を導きます。

円 O が点 D を通らない場合、図Ⅰ、図Ⅱ、どちらの場合でも、線分 PD の D の方への延長線上に、円 O との点 C 以外の交点が出てくるか、線分 PD 上に、円 O との点 C 以外の交点が出てくるかのどちらかです。この交点を E とします。

すると、問題1より、PA × PB ＝ PC × PE…②です。

①②より、PC × PD ＝ PC × PE なので、PD ＝ PE です。

すると、点 D と点 E が一致し、円 O が点 D を通らないことと矛盾します。

したがって、３点 A、B、C を通る円 O が点 D を通らないと矛盾が導かれるので、４点 A、B、C、D を通る円が描けることが証明できました。